# El conjunto cociente

https://elescritoriodeenrique.wordpress.com

Enrique Ferres

Bienvenidas al Escritorio de Enrique. Hoy voy a tratar el concepto de conjunto cociente. La primera vez que vi el conjunto cociente en la carrera no lo entendí muy bien, y creo que no comprenderlo es un problema muy común entre las estudiantes de Matemáticas. Sin embargo, esta entrada no va dedicada exclusivamente a quienes estudian Matemáticas o Informática. Como veremos, el conjunto cociente funciona como nuestra mente a la hora de hablar de "mesa" o "árbol", que por mucho que haya una gran cantidad de mesas y árboles diferentes entre sí, podemos agruparlos en una única categoría que los engloba (a esta categoría la llamaremos clase).

Propiamente, tendríamos que formalizar en qué sistema axiomático de la teoría de conjuntos vamos a trabajar (típicamente, en Matemáticas se suele considerar el sistema ZFC), pero vamos a dejar esta discusión para otra entrada, ya que no es el propósito de esta. Así que consideraremos una teoría ingenua de conjuntos, la que todas "tenemos en la cabeza". Si tenemos un conjunto $X$ no vacío, podemos tratar de agrupar sus elementos de forma que todos los que estén agrupados cumplan alguna propiedad que queremos. Por ejemplo, si $X$ es el conjunto formado por las personas residentes en España, podemos agruparlas por su país de nacimiento. Así pues, todas las personas nacidas en España estarían agrupadas en una misma clase. Pero también hay otras clases, como las personas nacidas en Ecuador, Marruecos, Francia, Nigeria, etc. Habrá tantas clases como países de nacimiento (si hubiese hecho el ejemplo con Corea del Norte habrían quedado muchas menos clases). Veamos otro ejemplo. Si $X$ es el conjunto de todas las aves de Madagascar y las agrupamos según el tipo de especie a la que pertenecen, las clases serán las especies de aves que viven en Madagascar.

En los ejemplos anteriores hemos visto que para que dos elementos del conjunto $X$ pertenezcan a una misma clase, tienen que cumplir la misma propiedad, y vamos a decir que están relacionados mediante una relación de equivalencia. Dado un conjunto $X$ definimos una relación de equivalencia, $\sim$, sobre los elementos de $X$ como una manera de agruparlos que satisface tres propiedades:

1. Propiedad reflexiva: $x \sim x$. Es decir, un elemento está relacionado consigo mismo.

2. Propiedad simétrica: si $x \sim y$, entonces $y \sim x$. Esto es, si un elemento está relacionado con otro, entonces el segundo está relacionado con el primero.

3. Propiedad transitiva: si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $x \sim z$. Esto quiere decir que si un primer elemento está relacionado con un segundo y, a su vez, el segundo está relacionado con un tercero, entonces el primero está relacionado con el tercero.

Puedes volver a los ejemplos anteriores para comprobar que, en efecto, las propiedades mediante las que hemos agrupado en clases a los elementos de nuestros conjuntos eran relaciones de equivalencia. Estas clases se llaman clases de equivalencia, pero las vamos a llamar simplemente clases. Cada clase tiene un elemento representativo. Esto quiere decir que, como todos los elementos de una clase están relacionados entre sí, es decir, cumplen la misma propiedad, podemos escoger uno de estos elementos, el que sea, y diremos que esa clase es la clase de ese elemento (e implícitamente estamos diciendo que esa clase es la formada por ese elemento y por todos los que están relacionados con él). Volviendo de nuevo la vista a nuestro ejemplo de las personas residentes en España, si Ana es una residente de origen español, la clase de los originarios de España es la clase de Ana. Aquí Ana es nuestro elemento representativo, pero también puede serlo Juan, si Juan es de origen español. Vamos a por un ejemplo "más matemático". Sea $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$ el conjunto de los números naturales (sí, para mí el 0 es un número natural, pero no iniciaré una discusión polémica). Definamos la siguiente relación (como ejercicio, puedes comprobar que cumple las tres propiedades de relación transitiva): si $n,\ m \in \mathbb{N}$, entonces $n \sim m$ si y solo si $n = m$ o existen $k_1,\ k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n = 2k_1$ y $m = 2k_2$ o $n = 2k_1 + 1$ y $m = 2k_2 + 1$. Esto quiere decir que dos números naturales $n$ y $m$ están relacionados si son el mismo número (para asegurarnos que cumple la propiedad reflexiva, aunque en este caso no es estrictamente necesario especificarlo) o los dos son números pares o los dos son números impares. En efecto, todo número par es de la forma $2k$, para algún $k$ y todo número impar es de la forma $2k+1$. Si tienes conocimientos más avanzados puedes demostrarlo por inducción sobre $k$, y si no los tienes puedes dar valores a $k$ para asegurarte (por si no lo sabías, el 0 es un número par, pues existe $k = 0$ de forma que $0 = 2 \cdot 0$). ¿Cual es la clase del 0? Como 0 es par, estará relacionado con todos los números pares, luego la clase del 0, que representaremos por $[0]$, es $[0] = \{0,\ 2,\ 4,\ \ldots\}$. Observemos aquí que la clase de cualquier número par es la misma que la del 0. En lenguaje matemático diríamos que $\forall k \in \mathbb{N},\ [0] = [2k]$. La clase del 1, como 1 es impar y los impares están todos relacionados, será $[1] = \{1,\ 3,\ 5,\ \ldots\}$, y la discusión previa para la clase de cualquier número impar es análoga; la clase de cualquier número impar es igual a la clase del 1. Se puede comprobar que las únicas clases que hay son $[0]$ y $[1]$, porque todos los números naturales son pares o impares y, además, ningún número natural es par e impar a la vez (para quien sepa más del asunto, esta relación induce una partición sobre $\mathbb{N}$).

Pues bien, si $X$ es un conjunto y $\sim$ es una relación de equivalencia definida sobre él, el conjunto cociente $\dfrac{X}{\sim}$ es el conjunto formado por todas las clases de equivalencia que se pueden formar. En el ejemplo anterior, teniendo en cuenta la discusión final, tendríamos que el conjunto cociente sería $\dfrac{\mathbb{N}}{\sim} = \{[0],\ [1]\}$.

El conjunto cociente aparece en muchas áreas de las matemáticas: en Álgebra Lineal aparece como espacio vectorial cociente, en Estructuras Algebraicas aparece como grupo cociente, anillo cociente, etc. En Topología aparece como espacio topológico cociente.

Aparece también, por ejemplo, en la teoría de homotopía de Topología Algebraica, y en programación es fundamental en el paradigma de la programación orientada a objetos.

Espero que os haya gustado el tema. Si queréis que profundice más en otra entrada, dejádmelo en los comentarios. ¡Hasta la próxima!