Algunos tipos de demostraciones

https://elescritoriodeenrique.wordpress.com

Enrique Ferres

Bienvenidas al Escritorio de Enrique. En este post vamos a tratar de entender algunos tipos de demostraciones matemáticas. No importa que no estés familiarizada con las demostraciones, voy a tratar de explicarlo de la forma más sencilla posible.

Algunos sociólogos llaman a esta época la época de la posverdad. Los medios o las redes sociales distorsionan la *verdad* transformándola mediante la manipulación de los sentimientos. Vivimos bombardeados de información, presuntamente objetiva, pero que se contradice entre sí y ya no sabemos qué es cierto y qué no lo es. Por suerte, en matemáticas no ocurre igual. Cuando algo se *demuestra* que es *cierto*, va a ser cierto para toda la eternidad. Esta es una de las razones por las que considero que las Matemáticas, si bien son la base del resto de Ciencias, no son una ciencia. Una ciencia, o rama científica, debe seguir el método científico, cuya base reside en el principio de *falsabilidad*, propuesto por el filósofo de la ciencia Karl Popper; esto significa que para que una hipótesis o teoría propuesta sea considerada debe poder refutarse mediante experimentos. Por ejemplo, la Teoría de la Relatividad de Einstein es falsable, pues se pueden, efectivamente, realizar experimentos como los recientes hallazgos de las ondas gravitacionales que siguen validando la teoría. Pero lo más importante es que se podría probar con algún experimento que la teoría no es cierta, como ya ocurriera con la cinemática newtoniana que diera paso a su generalización por Einstein cuando observaciones en la desviación de la órbita de Mercurio alrededor del Sol demostraron que las predicciones de las leyes de Newton no coincidían. Las matemáticas no son falsables en el sentido de que, una vez se ha demostrado que un teorema es cierto, lo será para siempre.

Volviendo a nuestro tema, imagínate que quieres demostrar lo siguiente: la suma de los n primeros números naturales $(0 + 1 + 2 + \cdots + n)$ es $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Se te podría ocurrir comprobarlo número por número:

(1) Si $n = 0$, entonces la suma de los n primeros números (solo estamos sumando el primer número natural, 0, que es como no sumar nada) es $\dfrac{0 \cdot (0+1)}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$. De momento vamos bien.

(2) Si $n = 1$, entonces la suma de los n primeros números, $0+1$, es $\dfrac{1 \cdot (1+1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. Seguimos bien.

(3) Si $n = 2$, entonces la suma de los n primeros números, $0 + 1 + 2$, es $\dfrac{2 \cdot (2+1)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$. Perfecto.

(4) Y ahora, para estar totalmente convencida, voy a meter en la calculadora la suma de los 10 primeros números y luego voy a ver si me da el mismo resultado. Entonces escribes en la calculadora $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$ y la calculadora te devuelve el resultado 55. Luego haces $\dfrac{10 \cdot (10+1)}{2} = \dfrac{110}{2} = 55$. Entonces te quedas completamente convencida de que la suma de los n primeros números naturales $(0+1+2+\cdots+n)$ es $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Pero solo lo has comprobado para $0, 1, 2, 10$, no para los infinitos números naturales que hay, y hasta que no lo compruebes para todos, no hay garantías de que no haya algún número dichoso por ahí que nos fastidie nuestra preciosa fórmula. Afortunadamente, en matemáticas tenemos una poderosa herramienta que nos evita pasarnos la eternidad probando número tras número esta y otras fórmulas en las que haya números naturales, pero para utilizarla, primero tenemos que conocer un poco más a los números naturales.

Los números naturales son los números que utilizamos para contar elementos: $0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$ El conjunto de números naturales lo denotamos por $\mathbb{N}$. Es un conjunto infinito, es decir, formado por una cantidad infinita de elementos (números en este caso). Al número de elementos de un conjunto se le llama cardinal, y se suele denotar por $\#$. Existen muchos infinitos, incluso hay infinitos más grandes que otros, pero esto lo dejamos para otra entrada. Los naturales se dice que son contables (o numerables), y es el infinito más pequeño de todos los infinitos. Otra particularidad de los números naturales es que todo natural tiene un "siguiente". El siguiente de 0 es 1, el siguiente de 24 es 25 y así. Los números enteros, $\mathbb{Z} = \{\ldots\ , -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$, también tienen siguiente, pero los números racionales, $\mathbb{Q} = \{\dfrac{n}{m}\ :\ n,\ m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\}$ (números con numerador y denominador enteros, el denominador no puede ser 0), es decir, las fracciones de toda la vida, no tienen siguiente, pues es imposible saber qué número sigue a otro, solo se puede decir, dados dos racionales, si uno es mayor, menor o igual al otro. Sin embargo, los naturales no tienen un número precedente. Mejor dicho, no todos lo tienen, pues 0 es el primer número, no hay ninguno anterior, y si cogemos un subconjunto de los naturales, $A \subset \mathbb{N}$, finito o infinito, este tiene también un primer elemento. A esto se le llama Principio de Buena Ordenación, y junto con la propiedad de los naturales de tener sucesor, es lo que nos permite utilizar el Principio de Inducción para demostrar propiedades sobre los números naturales.

El Principio de Inducción dice que en un conjunto A bien ordenado (que cumple el Principio de Buena Ordenación) en el que existe la operación sucesor (piensa por simpleza que $A = \mathbb{N}$), para probar una propiedad P sobre los elementos de A, hay que hacer lo siguiente:

(1) Supongamos que el primer elemento de A es a_0. Se tiene que comprobar que este elemento cumple la propiedad, es decir, $P(a_0)$. A este paso se le llama **caso base**.

(2) Ahora se supone que la propiedad se cumple para los primeros k elementos $a_0,\ a_1, \dots,\ a_{k-1}$, es decir $P(a_i),\ i = 0, \dots,\ k-1$. A esto se le llama **hipótesis de inducción**. Y se tiene que demostrar para el elemento $k+1$, a_k. A este paso se le llama **paso inductivo**.

La inducción se puede ver como una figura hecha con fichas de dominó. Si una ficha cae, la siguiente también va a caer (paso inductivo), pero para eso tenemos que asegurarnos primero de que hemos tirado la primera ficha (caso base), pues si no no caerá ninguna.

Volvamos a nuestra fórmula inicial: $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (esta es la propiedad P), para cualquier número natural n. Para demostrarlo, utilizaremos el Principio de Inducción.

(1) **Caso base:** para $n = 0$ ya hemos comprobado antes que la fórmula era válida.

(2) **Paso inductivo:** supongamos que la propiedad se cumple para los n primeros números (hipótesis de inducción). Tenemos que comprobarla para $n+1$, es decir, $1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Pues vamos a ello. Por hipótesis de inducción sabemos que $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, así que $1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$. Date cuenta de que es como sumar a ambos lados $n+1$ en la hipótesis de inducción. Ahora, en la parte de la derecha de la igualdad, teniendo en cuenta que al sumar dos fracciones hay que poner denominador común,

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} =$$

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Y esto es lo que queríamos ver.

Ahora sí podemos estar convencidas de que nuestra fórmula es cierta siempre. Es *verdad*, una verdad eterna e inmutable, no habrá avances científicos que la cambien. No hay voces autorizadas que puedan cambiar su veracidad. En matemáticas no hay criterios de autoridad, si una demostración no contiene fallos (es decir, es una demostración con todas las de la ley), entonces aquello que se ha demostrado será correcto.

Pero no todo son propiedades sobre números naturales en Matemáticas, por lo que la inducción no nos sirve siempre. Otro tipo de demostración es la demostración directa. Esta se basa en la aplicación de axiomas y resultados ya demostrados en una cadena de razonamientos que parte de las hipótesis y, con suerte, concluye con el resultado deseado. Por ejemplo, si queremos probar que dados dos números reales $x,\ y$ tales que $x+y = x$, se tiene que $y = 0$, podemos hacer un razonamiento directo. Sí, es una proposición evidente, pero intenta probarla antes de leer la demostración.

Como para todo número real, a se tiene que $a+(-a) = a-a = 0$, entonces sumando $(-x)$ a ambos lados, $x+y+(-x) = 0 = x+(-x)$. Ahora, como los números reales tienen la propiedad conmutativa $(a+b = b+a)$, $x+y+(-x) = x+(-x)+y = x-x+y = 0+y = y = 0$. Ahora ya está demostrado. Parece rebuscado dada la simpleza que queríamos probar, pero una demostración completa tiene que contener todos los pasos intermedios (cuando ya se tiene un bagaje, basta con dar aquellos pasos que no sean triviales, pues las demostraciones podrían resultar interminables).

Otro tipo de demostración es la demostración por contraejemplo. Esta técnica suele utilizarse para probar que algo es *falso*, y consiste en encontrar un ejemplo (llamado contraejemplo) que haga que la propiedad no se cumpla. En la vida cotidiana también utilizamos esta herramienta. Una situación muy simplona puede ser la siguiente: un amigo te dice que solo sale de fiesta los viernes. Pero un día le dices de quedar el domingo por la mañana y te respone que no puede porque el sábado va a salir de fiesta. Acabas de descubir que tu amigo te mintió, porque has encontrado un contraejemplo que hace falsa su afirmación.

Veamos un ejemplo matemático. Queremos saber si dado un número real x, $x^2 \geq x$. Empezamos probando con algunos números. $1^2 \geq 1$ es cierto, porque son iguales. $2^2 = 4 \geq 2$, $(\sqrt{2})^2 = 2 \geq \sqrt{2}, (-1)^2 = 1 \geq -1$. Entonces nos convencemos de que tiene que ser cierto. Tratamos de probarlo con una demostración directa aplicando lo que sabemos de números reales, pero al cabo de un rato de pegarnos con el problema caemos en la cuenta de que no hemos probado con los números entre 0 y 1. Así que tomamos $\frac{1}{2}$ y hacemos $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. ¡Ahí está nuestro contraejemplo! La proposición es falsa.

Terminaremos nuestra pequeña lista de demostraciones viendo una de mis favoritas, la reducción al absurdo. Esta técnica consiste en coger la conclusión de la proposición, negarla, y tratar de llegar a un absurdo lógico. Veamos un ejemplo clásico. Ya hemos visto que los números racionales son aquellos que se escriben en forma de fracción. Los números irracionales son los números reales que no son racionales. Por ejemplo, π, es un irracional (la demostración es demasiado elevada para escribirla aquí). Se dice que el primer irracional que se "descubrió" fue $\sqrt{2}$, y que el artífice fue Hipaso de Metaponto, en el siglo V a.C. Hipaso era un miembro de la secta pitagórica, conocida por su secretismo y su filosofía de que toda la realidad es número. Creían que toda magnitud era una razón (es decir, no existía nada más que los números racionales; notemos que un número entero es también un racional con denominador 1). Hipaso, irónicamente, demostró que $\sqrt{2}$ era irracional utilizando el Teorema de Pitágoras. Este descubrimiento, con el añadido de que lo difundió fuera de la secta, le valió morir ahogado en un naufragio "fortuito" (aunque hay quien dice que se suicidó para limpiar su alma). Para ver la demostración por reducción al absurdo, vamos a recordar algunas propiedades que necesitaremos:

(1) Todo número racional de la forma $\frac{n'}{m'}$ se puede escribir como $\frac{n}{m}$, donde n, m son primos entre sí (el máximo común divisor es 1). A esta fracción se la llama irreducible. Ejemplo: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. 2 y 4 no son primos entre sí, porque ambos eran divisibles por 2 (es su máximo común divisor).

(2) Si x es par, entonces x^2 también es par. Probémoslo. Recordemos que un número par x es de la forma $x = 2k$, para algún natural k, como ya comenté en mi anterior post El conjunto cociente . Por tanto, si x es par, entonces $x^2 = (2k)^2 = 2^2k^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Y como $2k^2$ es un número natural, hemos visto que x^2 es par.

(3) Este es el recíproco del punto anterior. Si x^2 es par y x es natural, entonces x es par.

No lo voy a demostrar, pero como indicación, se razona por reducción al absurdo suponiendo que x es impar y se utiliza el punto (4). Tampoco voy a demostrar los puntos siguientes.

(4) Si x es impar, entonces x^2 también es impar.

(5) Este es el recíproco del punto anterior. Si x^2 es impar y x es natural, entonces x es impar.

Ya podemos probar la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Comenzamos suponiendo que es racional y que podemos escribirlo como una fracción irreducible $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ (n y m son primos entre sí). Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad tenemos que $2 = \frac{n^2}{m^2}$. Pasando m^2 multiplicando a la izquierda nos queda $2m^2 = n^2$. Por lo tanto, n^2 es un número par y, por la observación (3) anterior, n es par. Pero si n es par y es primo con m, entonces m es impar, pues de lo contrario, ambos serían divisibles por 2. Escribimos $n = 2k$. Por tanto, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Sustituyéndolo en el razonamiento que estamos siguiendo, tenemos que $2m^2 = n^2 = 4k^2$. Si dividimos por 2 en ambos lados, tenemos que $m^2 = 2k^2$. De aquí deducimos que m^2 es par. Pero, de nuevo por la observación (3), ¡m tiene que ser par! Esto constituye un absurdo, porque hemos llegado a la conclusión de que m tiene que ser impar y par a la vez. Así que, no nos queda otra que concluir que $\sqrt{2}$ es irracional y ahogar a Hipaso en el mar.

Hemos visto los tipos de demostraciones más básicos, pero hay muchos más. Además, una proposición se puede demostrar de formas distintas. No hay una demostración *mejor* que otra, aunque el bagaje matemático y el sentido de la estética puede hacerle a una matemática distinguir entre una demostración farragosa y otra elegante. Para terminar, te voy a dejar una “demostración” de que $2 = 1$ en los números reales a ver si puedes encontrar el fallo. Si no lo encuentras, abajo encontrarás la solución.

(1) Supongamos $a = b = 1$.

(2) Multipliquemos a izquierda y derecha por a, quedando $a^2 = ab$.

(3) Restemos b^2 a ambos lados, quedando $a^2 - b^2 = ab - b^2$.

(4) Como suma por diferencia es diferencia de cuadrados y a la derecha podemos sacar factor común b, tenemos $(a + b)(a - b) = b(a - b)$.

(5) Simplifiquemos a ambos lados $(a - b)$: $(a + b) = b$.

(6) Como $a = b = 1$, entonces sustituyendo $2 = 1$.

¿Qué ha ocurrido?

En el paso (5) lo que hemos hecho ha sido dividir en ambos lados por $(a - b)$, pero como $a = b$, estábamos dividiendo por 0, lo cual es imposible.

Espero que os haya gustado el tema. Si queréis que profundice más en otra entrada, dejádmelo en los comentarios. ¡Hasta la próxima!