Una sencilla construcción con regla y compás

https://elescritoriodeenrique.wordpress.com

Enrique Ferres

Bienvenidas al Escritorio de Enrique. Quiero dedicar esta entrada a un tema que se trata en la educación secundaria y, debido a su poca aplicación práctica, no se logra ver su belleza. Me refiero a la representación de las raíces cuadradas en la recta real.

Vamos a comenzar recordando algunas cuestiones sobre los números reales. En mi anterior entrada Algunos tipos de demostraciones vimos algunas propiedades de los números naturales ($\mathbb{N}$) y números enteros ($\mathbb{Z}$). Además, vimos la forma que tenían los números racionales ($\mathbb{Q}$), que son los números fraccionarios de toda la vida. Los números irracionales, $\mathbb{I}$, son todos aquellos números que no pueden escribirse en forma de fracción. También vimos en esa entrada que π y $\sqrt{2}$ son números irracionales, y ofrecimos una demostración de que el segundo lo es. Los números reales, $\mathbb{R}$, son todos aquellos números que son racionales o irracionales. Podemos escribir esta afirmación de muchas maneras, todas ellas equivalentes. Por ejemplo, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, o $\mathbb{R} = \{x \ : \ x \in \mathbb{Q} \ o \ x \in \mathbb{I}\}$. De hecho, tenemos la siguiente cadena de inclusiones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, que quiere decir que los números naturales son un caso particular de los números enteros (pues son los números mayores o iguales que 0); los números enteros son un caso particular de los números racionales (pues son los números fraccionarios con denominador igual a 1); y los números racionales son un caso particular de los números reales, como hemos dicho al principio. En esta cadena no aparecen los números irracionales porque no guardan relación (como subconjunto) con ningún subconjunto de los reales de los que hemos mencionado.

Los números reales se pueden representar en una recta, llamada recta real, y con la que estás familiarizada.

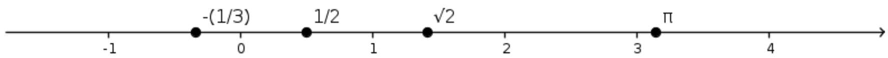

Figura 1

El número $\frac{1}{2}$ se puede representar dividiendo el intervalo $[0,\ 1]$ en dos mitades y tomando el punto medio. El número $-\frac{1}{3}$ se puede representar dividiendo el intervalo $[-1,\ 0]$ en tres subintervalos iguales y tomando el punto en común del primer subintervalo y el segundo (visto de derecha a izquierda). π no queda más remedio que tomar una aproximación del estilo 3,14159. Si todos los escribimos en notación decimal, $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $-\frac{1}{3} = -0.\widehat{3}$ (es un número periódico, 0,333333...). π, al ser un número irracional, no podemos escribir todos sus decimales, pues son infinitos y no siguen ningún patrón. Lo mismo podemos decir de $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$ Sin embargo, los números radicales (números de la forma $\sqrt[r]{n}$) con $r = 2$ (es decir $\sqrt{n}$) y $n \in \mathbb{N}$ (pues como ya sabrás, no existe la raíz cuadrada de números negativos en el conjunto de los números reales) sí podemos representarlos en la recta real de manera exacta, aunque, como con $\sqrt{2}$, no conozcamos sus infinitos decimales.

Observemos que para los números $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, 3,14159 solo hemos necesitado una regla para "construirlos". Teníamos una línea en la cual hemos definido una unidad de medida (por ejemplo, $1cm$ o $1m$) y, con nuestra regla situada sobre esa línea hemos hecho las medidas oportunas para representar esos números en la línea, la recta real. Todos los números naturales, enteros y racionales podemos representarlos en la recta utilizando la regla. Para representar los números de la forma $\sqrt{n}$ vamos a necesitar también un compás. En la antigua Grecia, los matemáticos solo consideraban válida una construcción geométrica que utilizara regla y compás. Hay una vasta teoría algebraica dedicada al estudio de construcciones con regla y compás. Antes de comenzar con la representación de estos números, veamos algunas cosas que necesitamos.

Lo primero que observamos es que no todos los números $\sqrt{n}$ son irracionales. Por ejemplo, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{25} = 5$. Eso es, si n es un número natural elevado al cuadrado, $n = m^2$, entonces su raíz es un número natural, m. A estos números se les llama cuadrados perfectos.

También observamos que si n no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es un número irracional ($\sqrt{n} \in \mathbb{I}$). La demostración es algo técnica y prefiero no abordarla aquí. Lo que sí que voy a probar, ya que no quiero dejaros con la miel en los labios, es que si p es un número primo (número natural cuyos únicos divisores son 1 y p), entonces $\sqrt{p} \in \mathbb{I}$. Veamos algunas propiedades de los números primos, que aunque no sean indispensables, nunca está de más saber más de la cuenta.

Como el conjunto de números primos $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{N} \ : \ p \ primo\}$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$, entonces tiene un primer elemento (el 2, pues el 1 no se considera número primo).

El único número primo par es 2. Pues si p es un número primo distinto de 2 y es par, entonces sería divisible por 2 y no sería primo (clásico razonamiento por reducción al absurdo). Por tanto, el resto de números primos son impares (de la forma $2k+1$).

Si un primo p divide al producto ab, entonces p divide a a o a b. Por ejemplo, 7 divide a $42 = 14 \cdot 3$, y 7 divide a 14. También puede ocurrir que divida a los dos números, por ejemplo 7 divide a $98 = 14 \cdot 7$, y 7 divide a 14 y a 7.

$\mathcal{P}$ es un conjunto infinito. Esto también requiere demostración, aunque si te resulta muy complicada puedes omitirla. Es por reducción al absurdo.

Si $\mathcal{P}$ fuera finito, entonces $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n : p_i \; primo\}$ y existiría un primo mayor que todos $p_n \in \mathcal{P}$. Consideramos el número $q = p_1 \cdots p_n + 1$. Si q fuera un número primo, este sería mayor que p_n y, por tanto, llegaríamos a un absurdo, porque $\mathcal{P}$ tendría un elemento más de los que habíamos supuesto. Así que supongamos que q no es primo. Como todo número natural puede descomponerse como producto de números primos elevados a ciertas potencias (es el llamado Teorema Fundamental de la Aritmética; por ejemplo, $12 = 2^2 \cdot 3$), lo que quiere decir que todo número natural tiene divisores primos, entonces existe $p_i \in \mathcal{P}$ de forma que p_i divide a q. Obviamente, p_i divide a $p_1 \cdots p_n$, pues es uno de sus factores. Por tanto, concluimos que p_i divide a $q - p_1 \cdots p_n$ (por ejemplo, 3 divide a 24 y a 6, por lo que divide a $24 - 6 = 18$). Pero $q - p_1 \cdots p_n = (p_1 \cdots p_n + 1) - p_1 \cdots p_n = 1$. Y esto constituye un absurdo, porque p_i no es 1 y ningún número natural excepto 1 divide a 1. Por tanto, el conjunto de números primos es infinito.

Finalmente, veamos que si p es primo, entonces $\sqrt{p}$ es irracional. Si $p = 2$, ya vimos en el post anterior que $\sqrt{2}$ es irracional. Si $p > 2$, el razonamiento es muy parecido a la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, también por nuestra querida reducción al absurdo. Supongamos que $\sqrt{p}$ es racional y lo podemos escribir como una fracción irreducible $\sqrt{p} = \dfrac{m}{n}$ (recordemos que m y n son primos entre sí). Elevando al cuadrado tenemos que $(\sqrt{p})^2 = p = \dfrac{m^2}{n^2}$, y multiplicando a ambos lados por n^2 obtenemos $pn^2 = m^2$. Esto quiere decir que m^2 es un múltiplo de p, o lo que es lo mismo, p divide a $m^2 = m \cdot m$. Por una de las propiedades de los números primos que hemos visto, p divide a m (porque un primo que divide a un producto, divide a al menos uno de sus factores, pero $m^2 = m \cdot m$ es un producto con los dos factores iguales). De esta forma, $m = pk$, para algún número natural k, y $m^2 = k^2p^2$. Sustituyendo esto en la fórmula anterior, tenemos que $pn^2 = m^2 = k^2p^2$. Por tanto, $n^2 = k^2p$. Por el mismo razonamiento de antes, p divide a n. Pero esto quiere decir que p divide tanto a m como a n, lo que supone un absurdo, ya que habíamos supuesto que m y n eran primos entre sí. Así concluimos que $\sqrt{p}$ es irracional.

Comencemos a ver cómo representar $\sqrt{n}$ en la recta real. Vamos a usar el Teorema de Pitágoras. Este afirma que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Así que, dado $n \in \mathbb{N}$, construyamos un triángulo rectángulo cuya altura es 1 y cuya base es $\sqrt{n-1}$. El Teorema de Pitágoras dice que el cuadrado de la hipotenusa de este triángulo mide $1^2 + (\sqrt{n-1})^2 = 1 + (n-1) = n$, luego la hipotenusa mide $\sqrt{n}$ (todas estas medidas son en una magnitud concreta, cm por ejemplo, pero eso se lo dejamos a las ingenieras y a las físicas, nosotras ya suponemos fijada una unidad cualquiera). En la siguiente imagen vemos representado un esquema de lo que estamos haciendo.

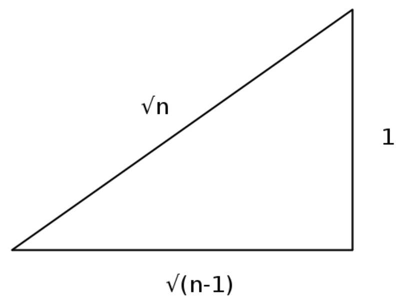

Figura 2

Si vemos el triángulo en el plano cartesiano con la base situada sobre el eje de abscisas y el vértice que tienen en común la base y la hipotenusa situado sobre el origen $(0, 0)$, si utilizamos un compás centrado en este vértice y marcamos la amplitud hasta el vértice que tienen en común la hipotenusa y la altura, podemos trazar una circunferencia centrada en $(0, 0)$ y de radio $\sqrt{n}$ que intersecará con el eje de abscisas en el punto $(\sqrt{n}, 0)$, ya que en este eje la segunda coordenada es 0 y la primera coordenada viene dada por el radio de la circunferencia (porque está centrada en $(0, 0)$). Veámoslo en una imagen.

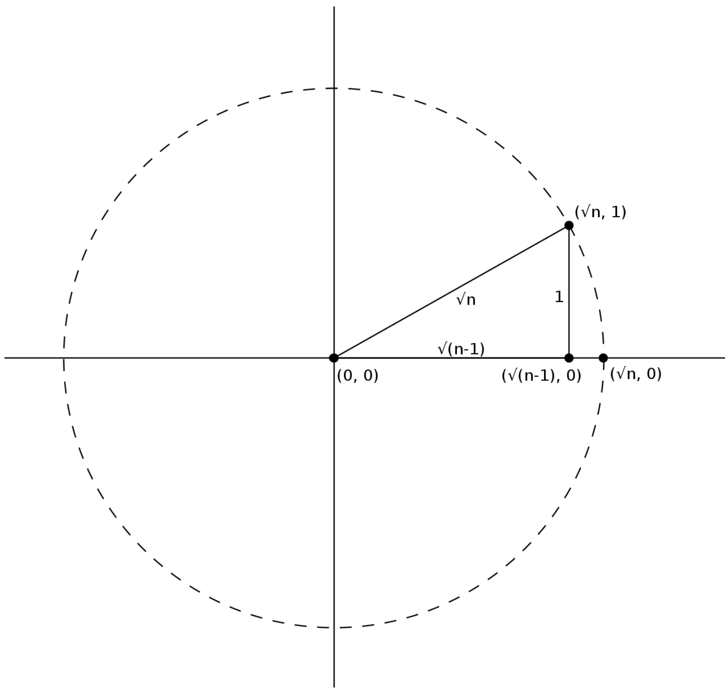

Figura 3

Aún no hemos terminado. ¿Qué nos garantiza que sepamos representar $\sqrt{n-1}$? Esta construcción está basada en la suposición de que sabemos representarlo. Sin embargo, hay una firme razón que nos asegura que podemos representarlo, y es que, en caso de que no supiéramos, siempre podemos repetir este proceso para $\sqrt{n-1}$ en vez de para $\sqrt{n}$, es decir, como $n-1=1+(n-2)$, construimos un triángulo como el anterior con altura 1 y base $\sqrt{n-2}$. Esto nos proporciona un triángulo con hipotenusa $\sqrt{n-1}$ y, utilizando el compás, podemos representar $\sqrt{n-1}$. Entonces podemos utilizar ya esta representación para representar $\sqrt{n}$. De nuevo hay imagen.

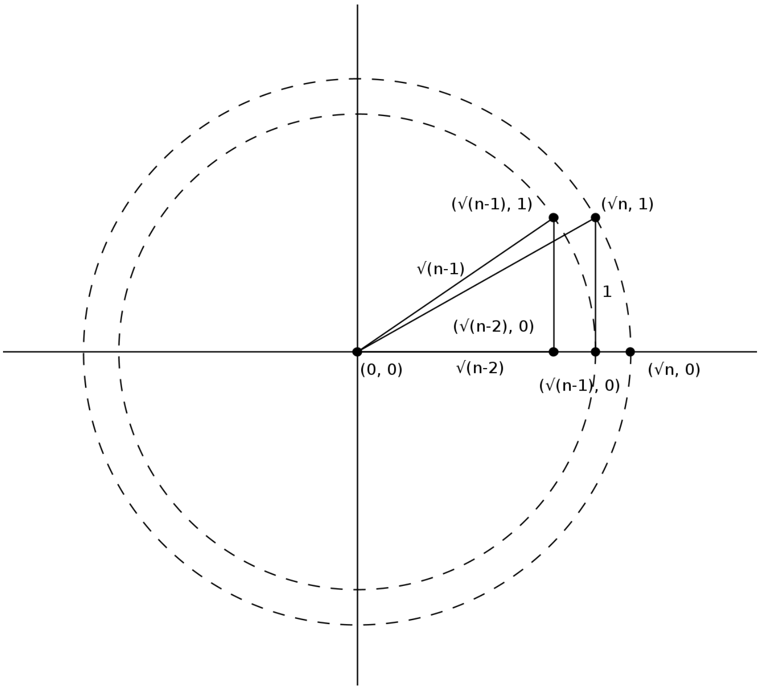

Figura 4: Vuelve a leer la descripción del proceso para entender el orden en el que se dibuja

Si sois perspicaces, os habréis dado cuenta de que puede que tampoco esté garantizado que sepamos representar $\sqrt{n-2}$. Bueno, sabemos que el proceso va a terminar, como muy tarde, en el paso $n-1$, porque llegaremos a construir un triángulo rectángulo de base 1 y altura 1 (la hipotenusa será, cómo no, $\sqrt{2}$), y sabemos dibujar 1, por tanto habremos terminado. De hecho, si haciendo los triángulos de base $\sqrt{n-1}$, $\sqrt{n-2}$, $\ldots$, $\sqrt{n-i}$, y $n-i$ es un cuadrado perfecto, para algún i, no necesitaremos hacer más, porque $\sqrt{n-i}$ será un número natural y, por tanto, representable trivialmente en la recta real. Veamos un ejemplo.

Supongamos que queremos representar $\sqrt{27}$ en la recta real. Como 27 no es un cuadrado perfecto, construimos un triángulo rectángulo de base $\sqrt{26}$ y altura 1. Como 26 no es un cuadrado perfecto, construimos un triángulo rectángulo de base $\sqrt{25}$ y altura 1. 25 sí es un cuadrado perfecto, porque $5^2=25$. Por tanto, en este último triángulo utilizamos el compás para trazar una circunferencia de radio la hipotenusa, $\sqrt{26}$. La intersección de esta circunferencia con el eje de abscisas nos da la base del triángulo con hipotenusa $\sqrt{27}$. Repitiendo el proceso con el compás, acabamos representando el número $\sqrt{27}$ en la recta real.

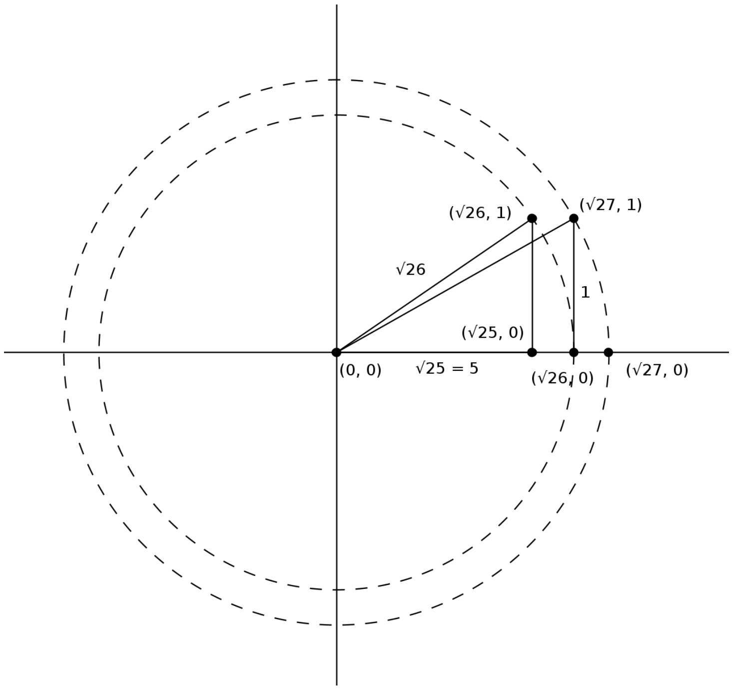

Figura 5

Lo que hemos hecho ha sido encontrar un procedimiento recursivo (es decir, que su forma general se repite paso tras paso). En el fondo es un algoritmo. Un algoritmo es una secuencia de pasos que parte de unos datos, tiene un cuerpo donde se realizan operaciones lógico-matemáticas y devuelve ninguno, uno o varios valores de salida. Dejaremos este tema para otra entrada.

Espero que esta os haya gustado y hayáis podido ver lo elegante de esta construcción geométrica. Por si os interesa, todas las imágenes las he dibujado con un software gráfico gratuito muy intuitivo e interactivo llamado GeoGebra. Si queréis más contenido de este tipo, dejádmelo en los comentarios. ¡Hasta la próxima!