Los giros de un cuadrado. Grupos

https://elescritoriodeenrique.wordpress.com

Enrique Ferres

Bienvenidas al Escritorio de Enrique. He decidido escribir un artículo de alcance mucho más general y, aunque el álgebra abstracta es de un nivel elevado, creo que esta entrada puede ser un modo muy intuitivo de introducirse en este maravilloso mundo.

Generalmente, cuando se habla de operación matemática solemos pensar en una relación numérica. Sin embargo, tanto los objetos como las operaciones en matemáticas van mucho más allá de los números y las famosas suma, resta, multiplicación y división. Pensemos en un cuadrado situado en el plano de la siguiente forma:

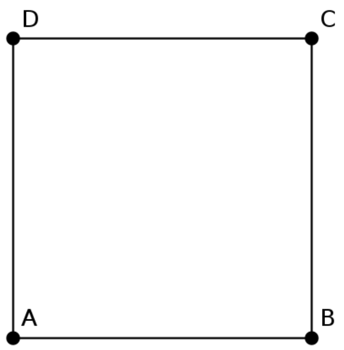

Figura 1: Posición 1.

¿De cuántas formas distintas podemos girar este cuadrado de forma que al girarlo se siga quedando en esa posición? La respuesta no se hace esperar: 4. Vamos a dar una explicación: para que al girar el cuadrado se quede en la misma posición es necesario que los giros sean de 90º (o $\frac{\pi}{2}$ en radianes) en torno a su centro (o no girarlo, que asumimos que es igualmente un giro). Si no lo giramos, conseguimos la primera posición, que es la inicial. Si giramos 90º este cuadrado en sentido de las agujas del reloj conseguimos la segunda posición:

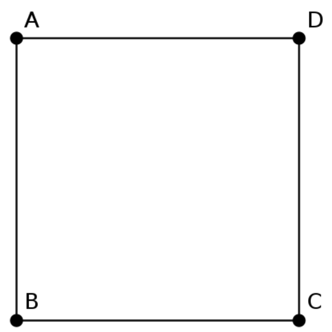

Figura 2: Posición 2.

Si giramos 90º este cuadrado (o giramos 180º el primer cuadrado), obtenemos la tercera posición:

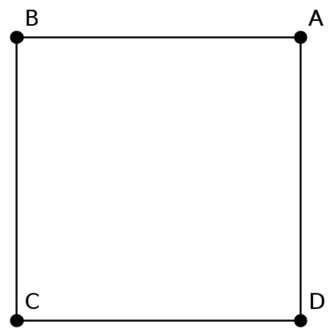

Figura 3: Posición 3.

Si giramos este cuadrado 90º (o 180º el cuadrado anterior, o 270º el cuadrado inicial), obtenemos la cuarta posición:

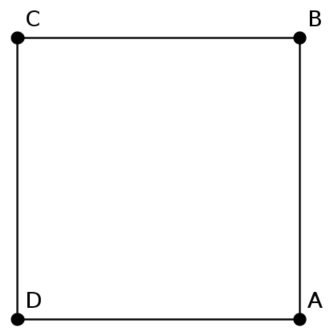

Figura 4: Posición 4.

Y no hay más, porque si volviéramos a girar este cuadrado 90º retornaríamos a la posición inicial. Podríamos haber decidido girar en sentido antihorario, pero si lo intentas, comprobarás que vas a obtener los mismos cuadrados que hemos obtenido y que el número mínimo de giros que se necesitan son 4.

Vamos a hablar en lenguaje matemático. Si tenemos un conjunto no vacío A, se define una operación $\circ$ sobre los elementos de A como una función que a cada par de elementos de A le asigna otro elemento de A. Escrito más formalmente, $\circ : A \times A \to A$. Lo interesante de esta operación es que podemos definirla para que haga "casi" lo que nos dé la gana. Por ejemplo, la suma sobre números enteros es la operación $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, y funciona de la siguiente forma: $+(a, b) = a + b$. Es decir, a y b son dos números enteros y $a + b$ también es un número entero.

El párrafo anterior muestra que para operar elementos solo necesitamos un conjunto y una forma determinada de operar con ellos. Para "matematizar" el problema de los giros del cuadrado vamos a definir un conjunto que represente las posiciones del cuadrado y una operación (el giro) que nos diga cómo girar el cuadrado.

Llamemos id a la posición 1 de nuestro cuadrado. Llamemos también σ a la posición 2, σ^2 a la posición 3, y σ^3 a la posición 4. Ahora definamos el conjunto $G = \{id,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \sigma^3\}$. Este conjunto representa los elementos sobre los que queremos operar, las posiciones del cuadrado; ahora nos falta definir la operación (giro), que va a ser de la forma $\circ : G \times G \to G$, y va a significar que si $g \circ h$, el resultado va a ser girar el cuadrado desde la posición dada por g tantos grados como grados está girado en sentido horario el cuadrado h. La forma de operar dos elementos del conjunto, $g,\ h$, viene dada en la siguiente tabla, que significa que operar un elemento g de la primera columna con un elemento h de la primera fila nos devuelve el elemento que está en la posición determinada por la posición correspondiente de la tabla. Vamos a denotar $\circ(g, h) = g \circ h$.

	id	σ	σ^2	σ^3
id	id	σ	σ^2	σ^3
σ	σ	σ^2	σ^3	id
σ^2	σ^2	σ^3	id	σ
σ^3	σ^3	id	σ	σ^2

La primera fila y la primera columna son los elementos del conjunto.

Por ejemplo, $id \circ \sigma^2 = \sigma^2$, que quiere decir que si giramos 2 veces (o 180º) en sentido horario el cuadrado en la posición 1, va a quedarse en la posición 3. $\sigma \circ^2 \sigma^3 = \sigma$. Esto se ve fácil, porque si giramos 3 veces el cuadrado desde la posición 3 (σ^2), va a acabar en la posición 2. No vamos a entrar en detalles, pero si has leído el artículo Congruencias. Las matemáticas de la semana, te recordará a la forma de operar en $\mathbb{Z}_4$ (de hecho, si conoces algo de álgebra, en concreto el concepto de isomorfismo, se puede comprobar que G con esta operación y $\mathbb{Z}_4$ con la suma que se definió en ese artículo, son isomorfos).

Esto nos lleva a la definición de una estructura matemática llamada grupo. Dado un conjunto no vacío G y una operación $\circ : G \times G \to G$, se define grupo como el par $(G, +)$ (a veces simplemente G si el contexto lo permite) que satisface las siguientes condiciones:

1. Propiedad asociativa: $g \circ (h \circ i) = (g \circ h) \circ i$, para todo $g,\ h,\ i \in G$.

2. Elemento neutro: Existe $e \in G$ de forma que $e \circ g = g \circ e = g$, para todo $g \in G$.

3. Elemento inverso (u opuesto): Para todo $g \in G$ existe $\bar{g} \in G$ de forma que $g \circ \bar{g} = \bar{g} \circ g = e$.

Hay muchos ejemplos de grupos. Por ejemplo, $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo (compruébalo como ejercicio viendo que se satisfacen las propiedades de grupo. Pista: el elemento inverso de un entero k es $-k$). Otro ejemplo es el de los giros del cuadrado con el que hemos estado trabajando. Sin embargo, pese a no ser una defnción muy restrictiva, hay pares conjunto-operación muy comunes que no son grupo. Por ejemplo, $(\mathbb{N}, +)$ no es grupo, porque el elemento neutro es el 0, pero entonces un número natural $n \neq 0$ no tiene elemento opuesto, porque sería $-n$, pero no pertenece a los números naturales. Otro ejemplo de no grupo es $(\mathbb{Z}, \cdot)$, porque el elemento neutro es el 1, pero para un número entero $k \neq 0$, el elemento inverso sería $\frac{1}{k}$, pero esto no es un número entero.

Observamos que ni siquiera se pide la propiedad conmutativa para la definición de grupo. Si un par $(G, \circ)$ es un grupo que satisface la propiedad conmutativa, decimos que el grupo es conmutativo o abeliano (en honor de mi tocayo Henrik Abel, famoso por la medalla Abel, considerada el nobel de las matemáticas). En nuestro ejemplo de los giros del cuadrado, $(G, \circ)$ es un grupo abeliano.

Hasta aquí vamos a llegar en este artículo. La teoría de grupos es una rama de muchísima actualidad, ya que sirve, por ejemplo, para estudiar algunos aspectos fundamentales de la física cuántica y la teoría de partículas. Espero que os haya gustado y os hayáis quedado con ganas de saber más. Si es así, dejádmelo en los comentarios y compartidlo con familiares, amigos y vecinos del barrio. ¡Hasta la próxima!