Números complejos y extensiones de cuerpos

https://elescritoriodeenrique.wordpress.com

Enrique Ferres

Bienvenidos al Escritorio de Enrique. En este artículo analizaremos la naturaleza de un tipo de números que, si bien son ampliamente conocidos y utilizados en las matemáticas y la ingeniería, son poco conocidos entre el común de los mortales. Estos números son los números complejos. Además, haremos un poco de introspección en las ecuaciones algebraicas y en la naturaleza de los números con respecto de estas.

La naturaleza de los números

Números naturales

La naturaleza de los números es algo que aún a día de hoy sigue siendo objeto de debate. ¿Qué es el número 1? Los números surgieron, evolutivamente hablando, como una abstracción de cantidades observables. Uno de los mayores descubrimientos de la historia fue darse cuenta de que la relación que hay entre un conjunto con una cantidad n de piedras y otro conjunto con una cantidad n de vacas es que tienen el mismo número de elementos (n por si os habéis perdido). De hecho, la palabra *cálculo* significa también *piedra*, pues nuestros antepasados, antes de abstraer la numeración, utilizaban guijarros para contar: plantas, cabezas de ganado... Sin embargo, ¿un número (natural) es exclusivamente una cantidad? Pareciera que de esa manera los números solo sirvieran para contar. Hay quienes creen que los números tienen “vida propia”, pero este tema lo relegaremos a nuestra sección Divagando.

Otro de los grandes descubrimientos numéricos de nuestra especie fue el número 0. Como esbozo mencionaré que no podríamos dotar de estructura de grupo a los números enteros con la suma, es decir, no podríamos hacer cosas del tipo $1 + (-1) = 1 - 1$.

Números negativos y racionales

También fundamental, como se puede seguir de la idea anterior, es el descubrimiento de los números negativos; cantidades que se sustraen de un conjunto de elementos. Considerar cantidades negativas es algo que el mismo Pitágoras aborrecería. Observemos que hasta aquí ya tenemos los números naturales y los números enteros.

Parece que lo siguiente que viene son los números racionales, aunque históricamente llegaron antes que los enteros negativos, incluso antes que el 0. Para el entendimiento humano, es mucho más fácil imaginar fracciones de una cantidad que cantidades negativas. Desde una visión eurocentrista, los números negativos no empezaron a ser tratados hasta la obra *Ars Magna*, de Girolamo Cardano, en 1545. El tema fundamental de esta obra es la fórmula general de las raíces de la ecuación de grado 3, descubierta unos años antes por Tartaglia (aunque ahora se sabe que quien primero la descubrió fue Scipione del Ferro; sin duda una época interesantísima de las matemáticas plagada de descubrimientos, rivalidades y traiciones). Cardano llamó a los números negativos *números ficticios*, y causaron un gran revuelo entre la comunidad matemática.

Volvamos a los racionales. Los egipcios eran expertos en números fraccionarios, pues con su complejo sistema socioeconómico necesitaban redistribuir sus tierras proporcionalmente tras los desbordamientos del Nilo. Si ahora te estás preguntando por qué se enseñan antes los números negativos que los fraccionarios en el colegio es porque tras la revolución conjuntista de las matemáticas, y muy en especial gracias a Bourbaki, el conjunto de números racionales se construye sobre los números enteros. Una vez más recuerdo que un número racional es de la forma $\frac{n}{m}$, donde $n,\ m$ son números enteros y m es distinto de 0.

Antes de seguir, fijémonos en lo siguiente. Una ecuación de primer grado es del tipo

$$ax + b = 0,$$

donde x es obviamente la incógnita. Supongamos que los coeficientes de esta ecuación viven en los enteros ($\mathbb{Z}$ como ya sabréis). Por ejemplo, imaginad que queremos saber cuánto vale 1 pedazo de queso sabiendo que hemos comprado 3 pedazos de queso por internet y que nos han cobrado 23 piedrólares. Sabemos que nos han cobrado 3 piedrólares por gastos de transporte. x representa el precio de un pedazo de queso. Entonces, la ecuación que planteamos es

$$3x + 4 = 23.$$

Para escribirla como $ax + b = 0$ pasamos restando 23 al lado izquierdo y tenemos

$$3x - 19 = 0.$$

Todos sabemos que estas ecuaciones se resuelven de manera muy facilita:

$$x = \frac{19}{3} \approx 6{,}34 \; \textit{piedrólares}.$$

Algo tan simple como una ecuación de primer grado con coeficientes enteros ya necesita de los números racionales para tener solución. Pitágoras habría preferido pagar 25 piedrólares con tal de que cada pedazo de queso le hubiera costado una cantidad entera.

En general toda ecuación de primer grado tiene siempre una solución racional, pues como $a \neq 0$, $ax + b = 0$ tiene como solución $x = \dfrac{-b}{a}$. Es más, todo número racional es solución de una ecuación de primer grado, no hay más que variar los coeficientes $a,\ b \in \mathbb{Z}$ para obtener todos los racionales. Así, en vez de definir a los números racionales como aquellos de la forma $\dfrac{n}{m}$, donde $n,\ m$ son números enteros y m es distinto de 0, podríamos definirlos como aquellos que son raíces de ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros. Por cierto, fijaos de nuevo en que las raíces son de la forma $x = \dfrac{-b}{a}$. Hasta tal punto llegaba el sentido antiestético de los números negativos que los matemáticos preferían escribir la ecuación de primer grado como $ax - b = 0$, para así tener bien bonitas sus raíces. Cuestión de gustos.

Números irracionales y reales

Ya vimos en Algunos tipos de demostraciones que Hipaso demostró la existencia de los números irracionales, probando que $\sqrt{2}$ es irracional. El término *irracional* no viene de que sean números contrarios a la razón, sino que no pueden ser escritos en forma de razón (o fracción). Este tipo de números hacen su entrada en el mundo humano dentro de la geometría, siendo la medida de la hipotenusa de triángulos rectángulos.

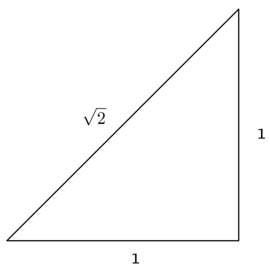

Figura 1

Recordemos que en un triángulo rectángulo de catetos $a,\ b$, la hipotenusa (llamémosla x) se calcula, según el Teorema de Pitágoras, como $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Pitágoras preferiría escribirlo como

$$x^2 = a^2 + b^2.$$

Ahora bien, si pasamos restando el término de la derecha a la izquierda, tenemos que

$$x^2 - (a^2 + b^2) = 0.$$

Supongamos, como hacían los griegos, que $a,\ b \in \mathbb{Z}$ (de hecho, son naturales, pues no es lógico que haya medidas negativas en geometría plana). Entonces, $a^2 + b^2$, y así $(a^2 + b^2)$ es un número entero. Llamemos a este último número c. De este modo, la ecuación la podemos reescribir como

$$x^2 + c = 0,$$

que es una ecuación de segundo grado (recordemos que la expresión genérica de una ecuación de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$). Además, esto prueba que todo irracional de la forma $\sqrt{n}$ es raíz de una ecuación de segundo grado. En concreto, de la ecuación $x^2 - n = 0$.

Observemos que nos hemos llevado a los irracionales a nuestro terreno algebraico, donde también tienen cabida como raíces de ecuaciones de segundo grado (con coeficientes en $\mathbb{Z}$ como nos gusta). PERO no todos los irracionales son raíces de estas ecuaciones. Algunos irracionales son raíces de ecuaciones de grados mayores que 2, como $\sqrt[3]{2}$ que es raíz de la ecuación de tercer grado $x^3 - 2 = 0$. Y también hay irracionales que no son raíz de ninguna ecuación (con coeficientes enteros). Pensemos en el archiconocido π. Lindemann demostró que π era un irracional de este tipo.

En matemáticas, a los números que son raíz de alguna ecuación con coeficientes enteros se les llama **algebraicos**, como $\sqrt{2}$, y a los números que no son raíz de ninguna ecuación (con coeficientes enteros) se les llama **trascendentes**, como π. Uno de los próximos artículos tratará estas dos clases de números.

Como sabréis, los números racionales junto a los irracionales forman los números reales. Esta carga semántica asociada al término *real* es, para mi gusto excesiva. Volviendo al comienzo del artículo, ¿es real un número? ¿Tiene una existencia independiente de aquello que cuantifica? A veces me pregunto si cuando cojo una pelota, estoy tocando realmente al número 1.

Números complejos

No todos los números reales son algebraicos, pues hay irracionales (reales) como π que son trascendentes. Por otra parte existen ecuaciones que "no tienen solución". ¿Te sabes alguna? Yo sí,

$$x^2 + 1 = 0.$$

Porque si la tuviera, sus raíces serían $\pm\sqrt{-1}$, y todos sabemos que no existen raíces cuadradas de números negativos. Leído de otra forma, no existe un número x tal que, al elevarlo al cuadrado, sea negativo.

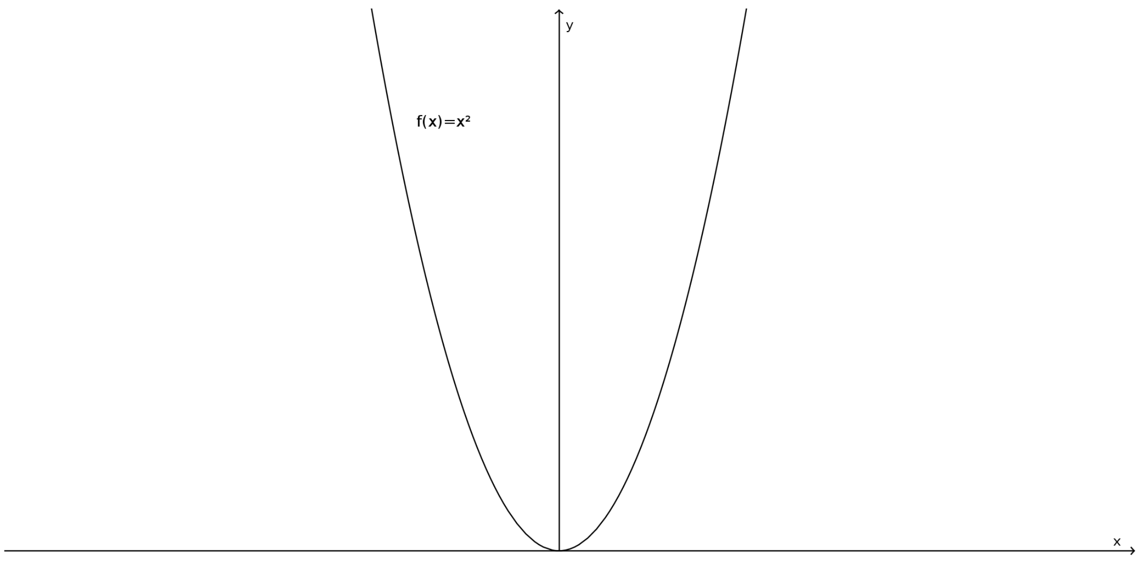

Figura 2: Gráfica de la función $f(x) = x^2$. Como se puede ver, los valores que devuelve la función (representados en el eje de ordenadas) toman valores mayores o iguales que 0.

Pero, como matemáticos, personas escépticas y con una curiosidad desbordante, ¿vamos a imponer nuestras limitaciones culturales y sensoriales al conocimiento? Echemos imaginación y otorguémosle la oportunidad de ser un número a esta raíz que hemos obtenido. Llamemos

$$i = \sqrt{-1}$$

a este número. Está claro que las raíces de

$$x^2 + 1 = 0$$

son ahora $\pm i$. A Cardano ya se le pasó por la cabeza esta idea en su *Ars Magna*, pero realmente fue Rafael Bombelli en 1572 en su *L'Algebra* quien comenzó a trabajar con este número. Personalmente, en vez de definir i como $\sqrt{-1}$, prefiero definirlo como aquel número tal que elevado al cuadrado vale -1 (o i es tal que $i^2 = -1$), dado que puede dar lugar a confusiones considerarlo como una raíz cuadrada como tal.

Teniendo una ecuación de la forma

$$x^2 + 2 = 0$$

comprobamos que una de sus raíces es $\sqrt{-2}$ (la otra es igual pero con signo negativo), pero con las propiedades de las raíces cuadradas, en concreto aquella que dice que

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b},$$

tenemos que

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}\sqrt{-1} = \sqrt{2}\, i,$$

volviendo otra vez a i (multiplicado por un número real).

Con la sola introducción de este número exótico, estamos comprobando que muchas de las ecuaciones que no podíamos resolver ahora sí tienen solución. Veamos otro ejemplo.

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

La fórmula general para resolver estas ecuaciones es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

así que en nuestro caso tenemos que

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i.$$

¡También hay solución! En este caso la solución involucra a un número real y a un múltiplo de i. En los casos anteriores hemos tenido como solución a i, que puede ser interpretado como $0 + 1i$, y a $\sqrt{2}\,i$, que puede ser interpretado como $0 + \sqrt{2}\,i$. Para considerar a estos números como ciudadanos de pleno derecho tenemos que ponerles nombre. En un principio se les llamó *números imaginarios*, pero ahora se les llama *números complejos*. Como máximo representante de estos números tenemos a i, que se llama *unidad imaginaria*. En general, se define un número complejo como $a + bi$, donde $a,\ b \in \mathbb{R}$ (es decir, a y b son números reales). El conjunto de números complejos se denota con el símbolo $\mathbb{C}$. A a se le llama *parte real*, y a b *parte imaginaria*.

Observemos que los números reales también son números complejos cuya parte imaginaria es 0.

En un principio, los números complejos no fueron tomados en serio. Se podían ver con cierta curiosidad, como un comportamiento espurio de las ecuaciones, ¿pero cómo iban a ser números si no dicen nada? Una ecuación modeliza un problema a resolver. Si tienes una ecuación cuya solución te tiene que devolver el precio, la temperatura o el tamaño de algo, no tiene sentido que aparezca $a + bi$. Sin embargo, Leonhard Euler sí se los tomó en serio. Vio que una solución compleja no tenía mucho sentido como conclusión de un problema, pero si esa solución compleja aparecía en medio de sus cálculos y trabajaba con ella, acababa llegando a una solución real que concordaba con el resultado esperado. Por poner un ejemplo para quien esté más familiarizado con las matemáticas (si no, no os asustéis, pasad de largo al siguiente párrafo), la integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx$$

es muy difícil de resolver, si no imposible, trabajando solo en los reales, pero si se trabaja en los complejos, es relativamente sencillo llegar a que la integral vale $\dfrac{\pi}{2e}$.

En una gran cantidad de campos, los números complejos tienen una importancia capital: física, ingeniería, estadística, análisis...

En la sección Matemáticas básicas añadiré un apartado sobre cómo trabajar con números complejos.

Dibujando números complejos

Cuando trabajamos con números reales, una herramienta muy útil para saber por dónde se mueven los números es la representación de los números en la recta real. Sin embargo, ¿cómo podemos representar números complejos? Un número complejo es de la forma $a+bi$, esto quiere decir que, sabiendo que estamos en los complejos, solo necesitamos conocer a y b para definir nuestro número. Es decir, tenemos que mover dos parámetros, igual que cuando dibujamos puntos en el plano $\mathbb{R}^2$. Así pues, al igual que decimos que $a + bi$ es un número complejo, podemos representarlo también como (a, b).

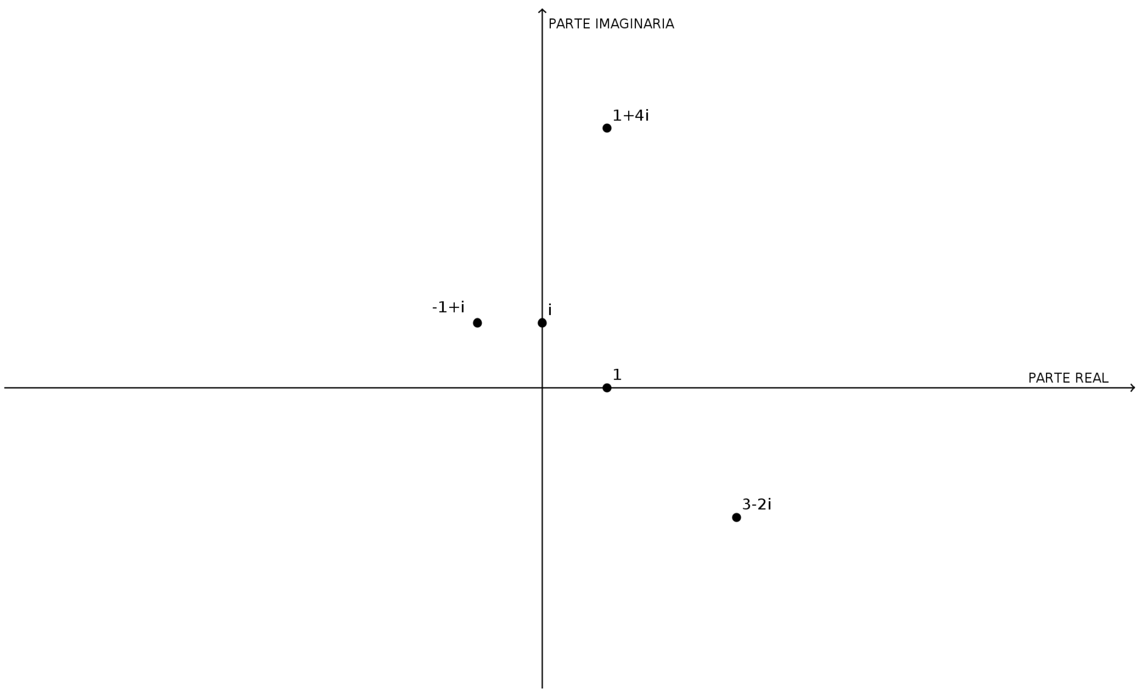

Figura 3: Representación de algunos números en el plano complejo.

Las maravillas de los números complejos las iremos descubriendo en próximos artículos.

Extensiones algebraicas

A lo largo de esta entrada hemos hecho hincapié en las ecuaciones y la relación entre la naturaleza numérica de sus coeficientes y de sus raíces. Esto no es gratuito. Uno de los ejes centrales de la Teoría de Galois es precisamente saber cuándo una ecuación tiene solución. Évariste Galois fue un matemático francés brillante del Romanticismo que murió con tan solo 21 años y le dio tiempo a resolver uno de los mayores enigmas de las matemáticas en su breve vida. Hay que añadir aquí que a la comunidad matemática le llevó casi un siglo entender las matemáticas que desarrolló para poder dar su respuesta. Sin palabras. El enigma del que hablo es el siguiente: para las ecuaciones de primer y segundo grado conocemos una fórmula explícita para resolverlas. Debido a su complejidad, la fórmula explícita para las ecuaciones de tercer y cuarto grado no se enseña, pero también existe (aparecieron por primera vez en el *Ars Magna*). Sin embargo, para ecuaciones de grado 5 y mayor no se conocía fórmula. Galois demostró que para estas ecuaciones no existe fórmula explícita para resolverlas. Cabe mencionar que otro genio cuya vida fue también breve y miserable, Henrik Abel, había demostrado esto pocos años antes que Galois. Sin embargo, Galois nos regaló un método para conocer cuándo una ecuación, sea del grado que sea, tiene solución. Y, por cierto, esas matemáticas que desarrolló no fueron otra cosa que la teoría de grupos.

El hincapié que hemos hecho en las ecuaciones se debe a que, dada una ecuación cuyos coeficientes viven en un conjunto numérico, tal como los racionales o los enteros, nos gustaría saber el mínimo número de elementos de fuera de ese conjunto numérico a añadir para que la ecuación tenga solución. Por ejemplo, para la ecuación $x^2 - 2 = 0$, cuyas raíces son $\pm\sqrt{2}$, los coeficientes viven en $\mathbb{Z}$ (aunque vamos a considerarlos como racionales, por razones en las que ahora no merece la pena entrar) y sus raíces pertenecen a los irracionales. Pero por qué tenemos que tratar la ecuación junto a sus raíces como algo que pertenece a los irracionales. ¿No hay algo más pequeñito en donde la ecuación y sus raíces vivan en armonía? Pues sí. Si nos fijamos, solo necesitamos añadir a los racionales $\pm\sqrt{2}$ para que esta ecuación viva a gusto.

Es más, para tener todos los complejos solo hemos necesitado considerar un nuevo número, i, para generarlos todos como $a + bi$ (con $a,\ b \in \mathbb{R}$). En nuestro nuevo caso, podríamos plantearnos algo por el estilo y considerar el nuevo número $\sqrt{2}$ para generar todos los números del conjunto numérico (llamémoslo cuerpo, que matemáticamente es como se llama) de nuestra ecuación $x^2 - 2 = 0$. Los números del cuerpo serán de la forma $a + b\sqrt{2}$, donde $a,\ b \in \mathbb{Q}$. A este cuerpo lo vamos a denotar $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, y se llama *cuerpo de descomposición de la ecuación* $x^2 - 2 = 0$. Aquí viven todos los racionales, pues solo hay que hacer $b = 0$. También está en el cuerpo de descomposición la otra raíz de la ecuación, $-\sqrt{2}$, cuando $a = 0,\ b = -1$.

Un cuerpo de descomposición es la extensión del cuerpo (conjunto numérico si no os sentís confortables con el término cuerpo) de los coeficientes de la ecuación a un cuerpo un poquito más grande en el que viven tanto los coeficientes de la ecuación como las raíces de la misma.

Las extensiones de cuerpos y la teoría de grupos desempeñan un papel crucial en la Teoría de Galois, uno de los más maravillosos logros del conocimiento humano.

A lo largo del artículo hemos repasado la historia de los distintos conjuntos numéricos, llegando a los maravillosos números complejos (si queréis profundizar más en esa parte, os animo a que leáis *El camino a la Realidad*, del reciente galardonado con el Premio Nobel Roger Penrose), introduciendo por el camino nociones sobre ecuaciones algebraicas que nos han permitido en la segunda parte introducir las nociones fundamentales de la Teoría de Galois.

Espero que os hayáis quedado con ganas de más porque en futuras entradas hablaremos mucho más de estos temas. Y ya sabéis, compartidlo con familiares, amigos y vecinos del barrio. ¡Hasta la próxima!