De paseo por el cosmos

elescritoriodeenrique.com

Enrique Ferres

Bienvenidos al Escritorio de Enrique. El artículo de hoy es muy especial para mí. Por una parte, ¡es un orgullo anunciar que el grupo de divulgación Scenio me ha acogido en su familia! Y por otra parte, el día 31 de diciembre este blog cumple un añito. Mi deseo para este 2021, aparte de que acabe esta maldita pandemia, es que crezca mucho el blog. Muchísimas gracias a todos los que leéis El Escritorio y lo difundís.

Así que, qué mejor tema para celebrar estas noticias y despedir el año que mirar a las estrellas y pensar en grande. En este artículo vamos a observar los astros como los antiguos griegos hacían. Veremos cómo, en un alarde descomunal de ingenio, Aristarco dando los primeros pasos y Eratóstenes rematando la faena, fueron capaces de calcular los **radios de la Tierra, el Sol y la Luna**, así como la **distancia de la Tierra al Sol y a la Luna** ¡en el siglo III a.C.! Preparaos para este paseo por el cosmos.

Aristarco de Samos

Figura 1

Ya en tiempos de Aristarco de Samos (320-260 a.C.) se conocía bien que la Tierra era esférica, no había más que observar el aspecto de los cuerpos celestes para poder inferir que la Tierra no era especial. Más sorprendente es que los pitagóricos (s. VI a.C.)

propusieran que la Tierra giraba en torno a un *fuego central*. Sin embargo no quedaba claro qué fuego central era este. Probablemente se refirieran a algo místico debido a las peculiares creencias de este grupo. Aristarco, por su parte, fue más allá y aseveró que no solo la Tierra gira en torno a un fuego central, ¡sino que ese fuego central es el Sol! Lamentablemente añadió que lo hacía en órbita circular (Kepler demostró que las órbitas son elípticas en el siglo XVII y más adelante la Teoría de la Relatividad General de Einstein nos mostró que ni siquiera son unas elipses perfectas). Aún así, hablamos de una de las grandes mentes de toda la Historia.

Supongo que os preguntaréis que si Aristarco ya había mencionado que la Tierra orbita alrededor del Sol, por qué a principios del siglo XVII la Iglesia Católica juzgó a Galileo por defender esta misma postura. Pues aunque Aristarco sostenía esta idea, la filosofía aristotélica, desarrollada poco antes de nacer este, tuvo muchísima influencia en astrónomos de la talla de Claudio Ptolomeo (s. II a.C.). El modelo astronómico ptolemaico, expuesto en el *Almagesto* (bautizado así por los árabes, significa “El gran tratado”), está basado en la idea aristotélica de que la Tierra es el centro del universo y todo cuerpo celeste gira en torno a ella. Ptolomeo llegó incluso a desarrollar un complejo mapa astral con las posiciones relativas de los astros en el cielo. Evidentemente, no había fórmulas que predijeran el movimiento de estos astros, pues explicitar una fórmula para una estrella que gire alrededor de la Tierra es muy complicado. Sin embargo, fue tan exhaustivo analizando las posiciones de cada estrella que el resultado fue un mapa muy preciso. Era tan preciso que, una vez aceptada la idea de que la Tierra gira alrededor del Sol siguiendo una órbita elíptica, se seguía utilizando el modelo ptolemaico en la navegación.

Primera aproximación al cálculo de la distancia al Sol

Aristarco se propuso conocer el radio del Sol (R_S), el radio de la Luna (R_L), la distancia de la Tierra al Sol (d_S) y la distancia de la Tierra a la Luna (d_L). Semejante empresa no pudo terminarla una sola persona. Eratóstenes de Alejandría (276-194 a.C.), que nació en realidad en Cirene, fue quien tomo el relevo y terminó el difícil camino que comenzó Aristarco. Pero primero veamos cómo empezó nuestro primer protagonista a trabajar en este problema.

Aristarco observó que, casualidades de la vida, al estar tan lejos el Sol y tan cerca la Luna, sus tamaños aparentes con respecto de la Tierra son similares. Este hecho se puede corroborar en los eclipses totales de Sol, en los cuales la Luna tapa completamente a este. Esto quiere decir que la relación que guarda la distancia desde la Tierra al Sol con el radio del Sol es la misma que la que guarda la distancia desde la Tierra a la Luna con el radio de la Luna. Matemáticamente esto lo escribimos como

$$\frac{d_L}{R_L} = \frac{d_S}{R_S}.$$

Llamamos a esta cantidad b. Así,

$$b = \frac{d_L}{R_L} = \frac{d_S}{R_S}.$$

Pero nos interesa también reescribir esta ecuación pasando R_S al otro lado multiplicando y d_L al otro lado dividiendo. Así,

$$\frac{R_S}{R_L} = \frac{d_S}{d_L}.$$

Llamamos a esta cantidad a, en honor de Aristarco. Y como

$$a = \frac{R_S}{R_L} = \frac{d_S}{d_L},$$

quedándonos con la primera igualdad, $a = \dfrac{R_S}{R_L}$, de donde $R_S = aR_L$.

La cantidad b no nos va a servir para conocer las cantidades que quería conocer Aristarco, pero la manera en que la calculó me parece muy elegante y voy a explicarlo. Cojamos un palo o una barra recta de longitud l, y situémoslo frente a nuestro ojo de forma que la barra tape completamente el diámetro de la Luna como en el siguiente dibujo.

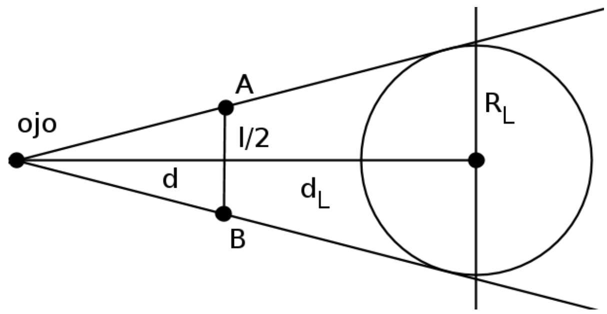

Figura 2: El segmento AB es el palo de longitud l. Uniendo el ojo y el centro de la Luna en un segmento de tamaño d_L (aproximadamente), este parte el segmento AB en dos segmentos de longitud $\frac{l}{2}$ por un punto a distancia d (conocida) del ojo.

De esta manera, nos queda el siguiente triángulo rectángulo.

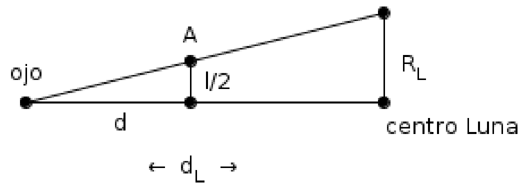

Figura 3

Este triángulo rectángulo, como se puede ver, contiene un triángulo rectángulo más pequeño, el que tiene por base d. En este caso, el Teorema de Tales nos dice que la base grande, d_L es a la altura grande, R_L, lo que la base pequeña, d es a la altura pequeña, $\dfrac{l}{2}$. Es decir, $\dfrac{d_L}{R_L} = \dfrac{d}{\frac{l}{2}} = \dfrac{2d}{l}$. Pero la primera fracción es precisamente b, y de la segunda fracción conocemos tanto el numerador como el denominador. Así es como Aristarco calculó esta cantidad. Ello lo dejó por escrito en su obra *De los tamaños y distancias del Sol y de la*

Luna. Resulta sorprendente poder calcular, utilizando solo un palo y una regla para medir la longitud de este palo y la distancia de nuestro ojo a su centro, la relación que existe entre el radio de la Luna y nuestra distancia a ella.

Aristarco también calculó de una manera muy ingeniosa la otra cantidad que hemos llamado
$$a = \frac{R_S}{R_L} = \frac{d_S}{d_L}.$$
En este caso vamos a tomar $a = \dfrac{d_S}{d_L}$. Para ello vamos a pensar en qué ocurre cuando vemos la Luna exactamente medio llena, es decir, cuando exactamente hay media cara clara y media oscura, separadas con un segmento en vez de con una curva. Esto quiere decir que entre la Tierra, la Luna y el Sol se está formando un triángulo rectángulo como se muestra en la siguiente imagen.

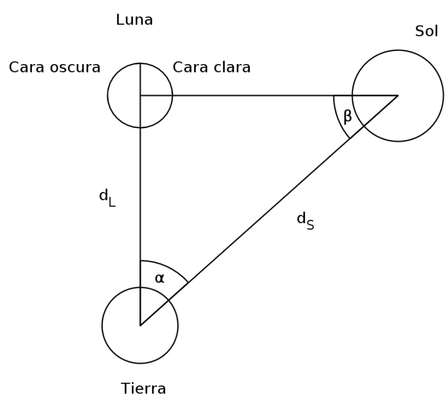

Figura 4

Recordemos en este punto un concepto de trigonometría (en griego, *medida de los tres ángulos*). Los griegos fueron los primeros en trabajar con la trigonometría, pero ellos no utilizaban los conceptos de seno, coseno y tangente que usamos gracias a los árabes medievales. Los griegos utilizaban algo que llamaban cuerda y que hoy en día podría establecerse la relación, dado un ángulo α,

$$\text{cuerda}\, \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

En general, dado un triángulo rectángulo, se define el coseno de uno de los ángulos α, distinto de 90°, como
$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}.$$
Es decir, el coseno de ese ángulo es la relación que guardan el cateto que tiene al lado con la hipotenusa. Y como la hipotenusa es siempre mayor o igual que cualquiera de los catetos, dicho sea de paso que el coseno es siempre menor o igual que 1.

En nuestro triángulo Tierra-Sol-Luna, el coseno de α es

$$\cos \alpha = \frac{d_L}{d_S}.$$

Recordemos que $a = \dfrac{d_S}{d_L}$, luego

$$\cos\alpha = \frac{d_L}{d_S} = \frac{1}{a}.$$

Además, el ángulo α se puede medir aproximadamente en algún momento del atardecer en el que la Luna ya sea visible y el Sol aún no se haya ido. Se me ocurre que se puede medir el ángulo que forma el Sol con la superficie de la Tierra y restárselo a 90º (los formados entre la superficie de la Tierra en un entorno pequeño de donde estemos midiendo y la Luna). Aristarco estimó que $\alpha = 87°$. Erró en su estimación, pero más debido a los instrumentos para medir este ángulo que al método para calcularlo. Aún así, utilizaremos las medidas tomadas por Aristarco para seguir con sus cálculos.

Conocido el ángulo, podemos calcular

$$a = \frac{1}{\cos 87°} \approx \frac{1}{0{,}523} \approx 19{,}1.$$

Eratóstenes de Alejandría y el radio de la Tierra

Figura 5

Aristarco llegó hasta aquí. Fue entonces cuando Eratóstenes tomó la vez y culminó con éxito este trabajo. Este señor sabía de la existencia de un lugar en el que, una vez al año, en una hora concreta, el Sol no proyectaba sombra alguna. Este lugar era Siena (actual Asuán), que se halla sobre el Trópico de Cáncer, y el momento en el que este fenómeno ocurría era el día de solsticio de verano a mediodía. En este preciso momento, se daba una situación como la del siguiente dibujo.

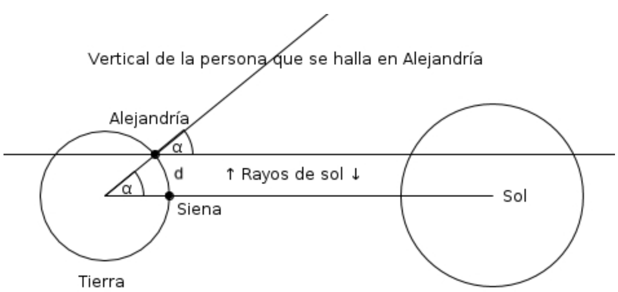

Figura 6

Mientras que en Siena el Sol no proyectaba sombra, en Alejandría el Sol estaba incidiendo con un ángulo α. Este ángulo Eratóstenes lo midió y vio que era aproximadamente $\alpha = 7°$. Por otra parte, Alejandría y Siena están separadas por una distancia d. La distancia que separa ambas ciudades es de $d = 843km$ (en aquella época se medía la distancia en estadios, y realmente he utilizado aquí la distancia "exacta" en lugar de la estimada por Eratóstenes porque no me parece significativo cómo la midió). /
Con estos ingredientes podemos calcular el radio de la Tierra, pues la relación que existe entre la distancia d y el perímetro de la Tierra es la misma que la que hay entre el ángulo α y los 360º que conforman la circunferencia terreste. El perímetro de la Tierra, suponiéndola redonda, es $2\pi R_T$. Así,

$$\frac{d}{2\pi R_T} = \frac{\alpha}{360}.$$

Pasando R_T al otro lado multiplicando, α al otro lado dividiendo y 360 al otro lado multiplicando, tenemos que

$$R_T = \frac{360d}{2\pi\alpha} = \frac{360 \cdot 843}{2\pi \cdot 7} \approx 6900km.$$

Lo que sorprende muchísimo dado que este valor se aleja poco de los de los 6371 km que tiene de media el radio terrestre (un error de aproximadamente el 8 %).

Apenas tengo palabras para compartir mis sentimientos de asombro y admiración por tal proeza. Mi profesor de Historia de las Matemáticas siempre exclamaba "¡Qué mente tan fría tenían los griegos!".

Pero Eratóstenes decidió no quedarse admirando su trabajo, sino que decidió terminar lo que había empezado Aristarco, medir con la razón lo que físicamente nos queda inalcanzable.

¿Disculpe, me podría decir a cuánto queda el Sol de aquí?

Para calcular el resto de cantidades, Eratóstenes recurrió a los eclipses. Observó que, en un eclipse lunar (cuando la Tierra tapa a la Luna), el tiempo que transcurre desde que la Luna empieza a eclipsarse hasta que se eclipsa del todo es la mitad del tiempo que tarda, desde que está completamente eclipsada hasta que termina el eclipse. Esto le permitió representar el siguiente esquema.

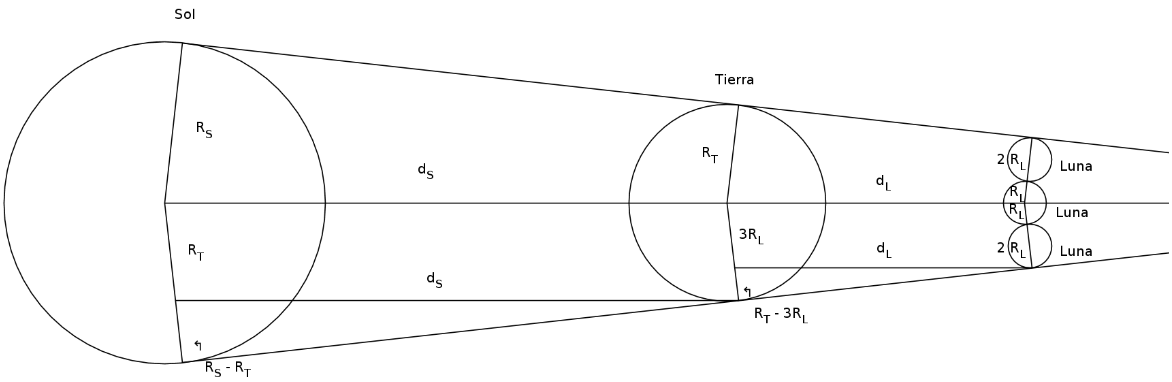

Figura 7: Como vemos, la Luna “cabe tres veces” en el eclipse.

Este esquema es la clave de todo, porque Eratóstenes consiguió construir dos triángulos rectángulos semejantes, es decir, cuyos lados guardan la proporción. Estos dos triángulos son los que se ven en el dibujo, el que está debajo del Sol y que llega a la Tierra, y el que está debajo de la Tierra y llega a la Luna de abajo. El primero de los dos triángulos que hemos mencionado tiene como hipotenusa d_S y como cateto más pequeño $R_S - R_T$, y el segundo triángulo tiene como hipotenusa d_L y como cateto más pequeño $R_T - 3R_L$. Como hemos dicho, dos triángulos semejantes mantienen proporciones entre lados. Por tanto, la proporción entre hipotenusa y cateto menor de ambos debe ser la misma. Esto es,

$$\frac{d_S}{R_S - R_T} = \frac{d_L}{R_T - 3R_L}.$$

Recordando que $a = \dfrac{d_S}{d_L}$ y pasando $R_S - R_T$ al otro lado multiplicando y d_L al otro lado dividiendo, tenemos que

$$a = \frac{d_S}{d_L} = \frac{R_S - R_T}{R_T - 3R_L}.$$

A su vez, también escribimos más arriba $R_S = aR_L$. Por tanto, introduciendo esto en la última expresión, nos queda

$$a = \frac{d_S}{d_L} = \frac{R_S - R_T}{R_T - 2R_L} = \frac{aR_L - R_T}{R_T - 3R_L}.$$

Es decir,

$$a = \frac{aR_L - R_T}{R_T - 3R_L},$$

y de aquí conocemos $a = 19{,}1$ y $R_T = 6900$. Por tanto, solo nos queda despejar R_L. Estas cuentas os las dejo como ejercicio. El resultado sale $R_L \approx 1815km$, una medida muy cercana a los 1737 km de radio medio que tiene la Luna.

El radio del Sol, por su parte, es $R_S = aR_L = 19{,}1 \cdot 1815 = 34666km$. Este resultado ya se aleja demasiado de los 695700 km que mide de media el radio del Sol. ¿Pero por qué se acercó tanto al radio de la Tierra y al de la Luna, pero al del Sol no?

Errores que cometieron Aristarco y Eratóstenes

Aunque nos han faltado por calcular d_S y d_L (que no son muy difíciles de calcular con lo que ya tenemos), vamos a ver qué errores cometieron nuestros protagonistas a la hora de obtener estos resultados y os dejaré como ejercicio calcular estos valores con las fórmulas que se han expuesto.

Error 1: la cantidad a

Para calcular el radio de la Tierra no hemos precisado saber el valor de a, pero para el de la Luna y el del Sol sí. Sin embargo, para el radio de la primera parece que no ha influido demasiado su valor y para el del segundo sí. El radio de la Luna se calculaba con esta fórmula:

$$R_L = \frac{(a+1)R_T}{4a},$$

y como $R_T = 6900$, entonces la fórmula es

$$R_L = \frac{(a+1)6900}{4a}.$$

Para ver cómo varía el radio de la Luna según cambia a (empezando en $a = 19$), dibujamos la gráfica correspondiente a la fórmula.

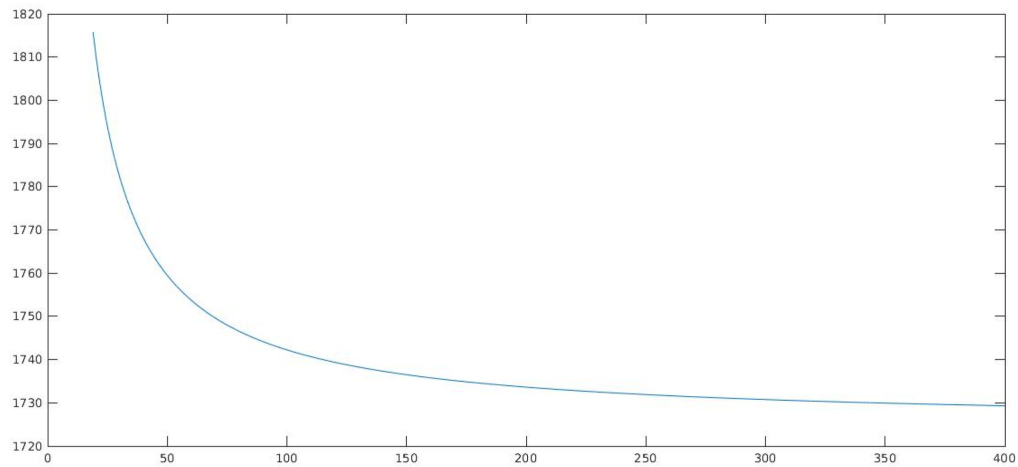

Figura 8: La función comienza para un valor de $a = 19$, muy cercano a 19,1 que Aristarco midió, y la evaluamos hasta $a = 400$, para el cual el valor del radio de la Luna es aproximadamente los 1729 km que mide.

Como vemos, los valores que devuelve la función son todos ellos bastante próximos a 1729. De hecho, desde $a = 100$, la diferencia es de apenas 10 km. Esto refuerza nuestra idea de que a no se ha calculado con precisión pero no influía apenas en el valor de R_L. Además, viendo que para $a = 400$ este valor es aproximadamente 1729, nuestra intuición nos dice que este es el valor que debería haber calculado Aristarco.

El radio del Sol mide de media 695700 km. Si metemos este valor en la fórmula $R_S = aR_L$, consideramos el radio de la Luna que obtuvimos previamente, el de 1815, y despejamos a, obtenemos

$$a = \frac{R_S}{R_L} = \frac{695700}{1815} \approx 383,$$

un valor bastante cercano a 400. Ahora bien, como hemos visto en el párrafo anterior, para $a = 400$, el radio de la Luna era aproximadamente los 1729 km que debería medir. Calculamos así $R_S = aR_L = 400 \cdot 1729 = 691600$, que es un valor muchísimo más próximo al radio real del Sol. Y es que el radio del Sol no es 19.1 veces el radio de la Luna, sino unas 400 veces este.

Pero a se calculó a raíz de la situación que vuelvo a recordar aquí.

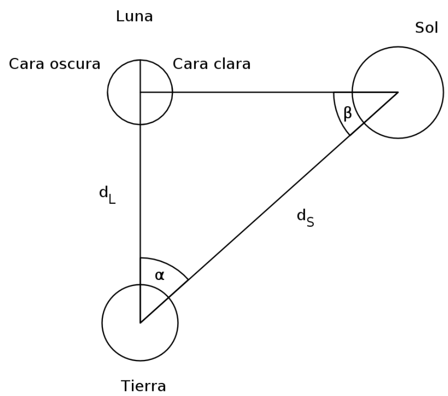

Figura 9

La fórmula para calcular a era

$$a = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Para obtener $a = 400$, despejamos $\cos \alpha$ y obtenemos

$$\cos \alpha = \frac{1}{400}.$$

Recuerdo que Aristarco midió el ángulo $\alpha = 87°$. Así que se tuvo que equivocar midiendo este ángulo. ¿Pero por cuánto? La clave está en calcular el arcocoseno de $\frac{1}{400}$ para saber cuál es el ángulo que debería haber medido.

$$\cos^{-1} \frac{1}{400} = 89°51'.$$

¡Una diferencia de menos de 3 grados! Y sin embargo, esa diferencia hizo que el radio del Sol le pareciera unas 20 veces más pequeño. Esta imprecisión en la medición del ángulo se debería principalmente a la escasez de instrumentos de medición de la época y a la poca precisión de los mismos.

Error 2: La posición de Siena

Eratóstenes se equivocó por unos 529 km (algunos más con su medida de la distancia entre Alejandría y Siena) en el cálculo del radio de la Tierra. Su medición de la distancia entre estas ciudades, de unos 924 km en vez de los 843 km que hemos utilizado nosotros, debió encontrarla en los libros de la biblioteca. Pero este no fue su principal fallo, sino que fue considerar que Alejandría y Siena se encuentran en el mismo meridiano, y realmente Siena se encuentra a unos 3 grados de longitud del mismo.

Además, se equivocó al medir el ángulo de incidencia de los rayos de Sol sobre Alejandría. Si bien es cierto que midió 7.2º en lugar de los 7º que hemos utilizado nosotros, la medida exacta es de 7.5º, que aunque no difiere mucho de su medición, el resultado habría sido más preciso.

Conclusiones

Como muchas veces pasa en la Historia, algunas figuras importantísimas han quedado olvidadas o eclipsadas por otras. Eratóstenes pasó a la historia por ser quien primeró estimó el radio de la Tierra, mientras que Aristarco es una figura de culto que solo algunos estudiosos conocen y reconocen el valor que tiene como primer heliocentrista y como pionero a la hora de afrontar esta hazaña.

Por otra parte, aunque los resultados no fueran los “exactos”, ya hemos visto que se debió a la imprecisión de las medidas del momento y no al método seguido por estos dos sabios, el cual demuestra una capacidad de razonamiento y de manejo de la geometría impresionantes.

Espero haber contribuido a haceros un poco más amantes de Aristarco y de los griegos como soy yo. Me despido hasta el próximo artículo dándoos las gracias por este primer año de muchos. Y ya sabéis, comentad y compartid con familiares, amigos y vecinos del barrio. ¡Hasta la próxima!