La verdadera naturaleza de los números

Enrique Ferres López

23 de junio de 2021

Introducción

¿Qué es el 1? ¿Y el 2? ¿El 0? ¿$\frac{1}{2}$, π, e, $\sqrt{2}$, i? Probablemente por vuestra cabeza haya aparecido la palabra "números". Quien menos conozca sobre matemáticas también habrá pensado "letras", incluso "signos extraños". Despojémonos de todo lo que creemos saber sobre ellos. ¿Qué queda entonces? **Símbolos**.

Los símbolos, por sí mismos, no tienen ningún valor, son un trazo más o menos arbitrario sin ninguna información. Nosotros somos quienes completamos esa información. La escritura es una codificación propia del ser humano basada en un alfabeto. Este alfabeto contiene unas letras, sin ningún significado intrínseco, que, al unirlas de una determinada manera, forman palabras. De nuevo, una palabra no significa nada hasta que no le asignamos un valor[1]. El poder de la simbología radica en que un colectivo comparte el significado codificado en el símbolo. Los símbolos no solo son escritos, los hay verbales, corporales, materiales. No podríamos reprocharle nada a un extraterrestre que aparcase su ovni en un aparcamiento destinado para personas con movilidad reducida, porque desconoce el significado asociado al símbolo de dicho aparcamiento.

Muy bien, entonces 1, 2, 0, $\frac{1}{2}$, π, e, $\sqrt{2}$, i son todos ellos símbolos cuyo significado es un número. ¿Pero qué es un número? Muchas veces, los seres humanos vivimos sin saber definir cuestiones como inteligencia, amor o felicidad. Sin ponernos de acuerdo

[1] O varios valores. Para salir de dudas tendríamos que contextualizar esa palabra.

en su definición, sabemos identificar si una persona es inteligente, si estamos enamorados o si somos felices. Sin embargo, para que la sociedad funcione, para poder enviar un mensaje desde nuestro smartphone, para pagar en el supermercado, para utilizar el GPS, para recibir la dosis precisa de una vacuna y para muchísimas cosas más, necesitamos matemáticas. Todo aquello que utilizamos tiene una base matemática, y para asegurarnos de que nuestra civilización no se va a desplomar en cualquier momento, cualquier concepto matemático tiene que estar perfectamente definido. Por esta razón, definir "número" es un asunto nada trivial.

¿Qué es un número?

El Hueso de Ishango

En 1960, Jean de Heinzelin de Braucourt descubrió el Hueso de Ishango cerca del nacimiento del Nilo.

Figura 1: Parece una escobilla de retrete, pero es un hallazgo importantísimo para las matemáticas.

Este hueso es un peroné de babuino con una punta de cuarzo incrustada en la parte superior del hueso que data del año 20000 a.C. aproximadamente. Para las matemáticas, este es uno de los descubrimientos arqueológicos más antiguos que existen. En este hueso aparecen tres grupos de muescas, presumiblemente realizadas con la punta de cuarzo.

- El grupo de la izquierda tiene las siguientes marcas: 11, 13, 17, 19. Su suma es 60.
- El grupo central contiene las marcas: 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5, 7. Su suma es 48.
- En el grupo de la derecha aparecen: 11, 21, 19, 9. Su suma es 60.

Cabe destacar que las diversas suman hacen sospechar que quien hiciera estas marcas no solo sabía contar, sino que utilizaba un sistema de numeración en base 12, la misma que utilizamos para pedir una docena de huevos, ya que 60 y 48 son ambos múltiplos de

12. Además, si sumamos 60+48+60 obtenemos 168, que se corresponde con los días que conforman la mitad de un calendario lunar.

La columna de la derecha parece que indica los números anterior y siguiente al 10: 9 y 11, y los números anterior y siguiente al 20: 19 y 21. La columna central parece que es una especie de regla para la duplicación y la mitad de un número. El doble de 3 es 6, el doble de 4 es 8, y la mitad de 10 es 5. No obstante, aún guarda muchas incógnitas este hueso. La que, como matemático, más me intriga, es la columna de la izquierda. Aquí aparecen LOS NÚMEROS PRIMOS ENTRE 10 Y 20. No se sabe si es casualidad, pero es algo que me conmueve.

Los primeros textos escritos

Shakespeare, Cervantes, Galdós, Hesse... Estas personas elevaron la escritura a las más altas cotas de la belleza y el ingenio. Sin embargo, la escritura no surgió de la necesidad del ser humano de expresarse de manera artística, o eso hacen suponer los hallazgos arqueológicos, sino por la necesidad de la civilización de llevar los registros del alimento y de las posesiones. En 1929, Julius Jordan descubrió unas tablas de arcilla mesopotámicas de hace unos 5000 años en las que aparecían recogidas una serie de cantidades de alimentos. Hasta donde se sabe, este es el primer registro histórico de escritura. ¡Números!

Hacia la abstracción

Cuando oí por primera vez, siendo un niño, que alguien tenía *cálculos* en el riñón me imaginé “3+2=5” y “2-1=1” en su riñón. Finalmente, mi madre (con su bendita paciencia) me explicó que un cálculo era una piedra. Muchos años después descubrí que el origen de la palabra *cálculo* en matemáticas tiene una relación directa con los cálculos referidos a piedras. Antiguamente, los pastores utilizaban piedras para contar las reses. Cuando un pastor sacaba a pastar al ganado, llevaba unas piedras. Cada vez que una res salía, el pastor sacaba una piedra, así hasta que hubieran salido todas. Al terminar la jornada, cada vez que guardaba una res, guardaba una piedra de las que había sacado. De esta forma, si se quedaba con dos piedras en la mano, podía saber que le faltaban dos reses. Podemos pensar que esto es una tontería, que basta con contarlas antes de salir y a la vuelta y comprobar si coinciden ambos números. Pero tenemos que darnos cuenta de que aún no se había llegado a ese proceso de abstracción. Los números dependían de un **contexto**. Si una tribu que supiese contar se hubiese encontrado con un registro de los días de un calendario de otra tribu, no habrían sabido qué significaban aquellos números. Podrían ver 168 muescas. Vale, pero ¿168 qué?

Parece que los números designan cantidades, y los humanos, sin ser especialmente buenos, tenemos la capacidad para distinguir cantidades. Sin embargo, no somos los únicos animales capaces de hacer esto. Hasta un determinado momento de la Historia, la *numerosidad* nos parecía una característica más de los objetos, como el olor, la textura o la dureza. No eran lo mismo 12 manzanas que 12 días. Pero el ser humano sí es especialmente bueno abstrayendo, y nos dimos cuenta, probablemente relacionando cantidades como el ejemplo de los cálculos y las reses, de que para contar podíamos dejar de lado aquello que queríamos contar, desligando al número del contexto. Me gusta pensar que este es un punto tan importante en nuestra Historia como lo es la invención de la rueda o el descubrimiento del fuego.

Los números naturales

Como hemos podido ver en este breve repaso de la Prehistoria matemática, los números surgen de la necesidad de contar cantidades. Pero estos números son el 1, el 2, el 3... Nosotros conocemos más números, ¿qué pasa con ellos? Más adelante los trataremos. De momento, centrémonos en estos.

Consideremos el conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. A los números de este conjunto los llamamos números **naturales**, y a este conjunto lo denotamos con la letra $\mathbb{N}$. El nombre viene, precisamente, de esta manera "natural" en la que surgen estos números.

Nota. *Algunos matemáticos, entre los que me incluyo, consideramos que el 0 es un número natural, pero si hablamos de los números naturales como una construcción histórica, debo dar mi brazo a torcer y admitir que el 0 no surgió de una manera tan natural como el resto de naturales. Tuvieron que pasar muchos siglos para que el 0 entrara en la escena matemática.*

Formas de denotar los números naturales hay muchas. Podemos citar la romana (I, II, III, IV, V, VI, ...) o la que todos conocemos, la indoarábiga (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...), pero a lo largo de la Historia ha habido muchas. Sin embargo, para realizar fácilmente operaciones, un sistema de numeración debe tener dos propiedades fundamentales:

- Debe tener una *base*, es decir, algo que nos agrupe los números de alguna manera para contarlos más fácilmente. Por ejemplo, en el sistema decimal, base 10, contamos de diez en diez. Así, podemos hablar de 2 centenas, que son 20 decenas y que son 200 unidades. En el sistema de base 12, podemos hablar de 2 docenas, que son 24 unidades. En nuestro día a día usamos muchos sistemas de numeración: para el dinero usamos un sistema decimal, para medir ángulos usamos un sistema hexadecimal (base 60) y, para marcar las horas, usamos un sistema en base 12 (además de un sistema hexadecimal para minutos y segundos). Los números romanos no parecen seguir ninguna base.
- Debe ser un sistema *posicional*, es decir, si escribimos un número, cada posición de cada cifra nos debe indicar si estamos en las unidades, decenas, centenas (en la base que sea)... Por ejemplo, el número 123 es un número que nos indica que posee 1 centena, 2 decenas y 3 unidades.

Imaginad qué difícil sería sumar CXIV+XXIII para los romanos y qué fácil nos resulta sumar 114+23 a nosotros (o eso espero). Podrían haber utilizado un sistema de numeración que fuese así: I I IV + II III. De este modo, solo hubiesen tenido que crear símbolos para los primeros números y habrían tenido un sistema de numeración decimal. Esto es lo que debió pensar seguramente Justin Bieber cuando se tatuó la fecha de nacimiento de su madre, 1975.

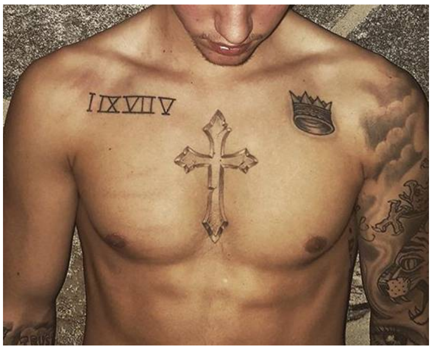

Figura 2: Tatuaje de Justin Bieber. Algunos ignorantes creerán que debería haber escrito MCMLXXV. Ni caso.

El 0 no solo es importante para poder escribir, por ejemplo, el número 10 (1 decena y ninguna unidad), sino que al sumar 114+23 nos damos cuenta de la importancia del 0 para poder sumar 114+023.

Nota. *De ahora en adelante consideraré el 0 como un número natural, siendo así que* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Los números no tienen tanto valor en sí mismos, sino que su valor completo se alcanza cuando se opera con ellos. Sin embargo, como dije anteriormente, los números tienen que estar bien definidos para poder servir como base sólida para hacer matemáticas sin llevarnos luego sorpresas como que se caiga el internet a nivel mundial en cualquier momento.

Entre las características más importantes de los números naturales encontramos las siguientes:

- Dados dos números naturales, n, m, o bien $n < m$, o bien $m < n$, o bien $n = m$. Esto se conoce como Propiedad Arquimediana, en honor a mi matemático favorito, y fundamenta el hecho de que podamos decir que hay menos objetos en un montón en el que hay 8 nueces que en otro en el que hay 9 vasos.
- Los naturales tienen un primer elemento, el 0. Antes de ese número no hay ningún otro. A esta propiedad se la conoce como Principio de Buen Orden.
- Todo número natural tiene un número que le sigue. Esto quiere decir, por una parte, que existen infinitos números naturales y, por otra parte, que podemos fundamentar la suma en esta propiedad.

El resto de propiedades, igualmente o más importantes, se refieren a las operaciones de estos números, pero no es el propósito de este artículo.

Con lo que sabemos hasta ahora, un número (natural) es un elemento del conjunto $\mathbb{N}$ que tiene una serie de propiedades y que representa cantidades. Pero esto, convendréis conmigo, sigue sin decirnos demasiado. ¿Cómo podemos asegurar la existenca del propio $\mathbb{N}$? Los matemáticos de finales del siglo XIX también se hacían esta pregunta. ¡Sí, siglo XIX! Euclides, Arquímedes, Newton, Euler y Gauss han sido los matemáticos más grandes de la Historia sin ni siquiera saber qué es un número natural.

En la época mencionada, los matemáticos se preocuparon mucho por el tema que hoy nos preocupa a nosotros, la fundamentación de las matemáticas. En concreto, querían asegurarse de que lo que se había estado haciendo hasta ese momento estaba bien hecho y no había errores o contradicciones. Fue una época llena de controversia, pero podemos concluir que se trató de establecer una serie de axiomas (afirmaciones sin tener que ser demostradas, de forma que el resto de resultados matemáticos puedan deducirse de estos axiomas). El arma más poderosa que tenemos para deducir resultados es la *lógica*, la cual se encargaron también los matemáticos de fundamentarla. Pero faltaba sobre qué aplicar esa lógica. Está bien, sobre *conjuntos*. La Teoría de Conjuntos es algo así como los modelos que utilizamos los matemáticos para, valga la redundancia, modelizar nuestras ideas. ¿Que queremos hablar de los números naturales? Pues hablamos del conjunto cuyos elementos son los números naturales. El problema viene por los elementos de este conjunto, que para que estén bien formalizados deben ser, a su vez, conjuntos. La Teoría de Conjuntos tuvo que ser igualmente fundamentada en aquella época, y aún a día de hoy sigue suscitando cierta polémica. Pero hay más o menos consenso en la mayoría de sus axiomas.

El axioma más importante que nos atañe es el de la existencia de un conjunto muy peculiar, el *conjunto vacío*. Este conjunto, que se denota por $\emptyset$, es, como bien dice su nombre, el conjunto sin elementos. Y ya está. Es un axioma, no tenemos por qué preocuparnos por demostrar la existencia de la "nada", asumimos que existe. Una característica de los conjuntos es que podemos contar de cuántos elementos consta. Incluso podemos contarlos (pero no uno por uno) si hay infinitos. Más aún, podemos saber si, dados dos conjuntos con infinitos elementos, uno es mayor que otro; es decir, hay infinitos más grandes que otros. Como es evidente, el conjunto vacío tiene 0 elementos.

Otra cosa que podemos hacer con los conjuntos es considerar conjuntos cuyos elementos sean conjuntos. Imaginad el conjunto $A = \{\mathbb{N}\}$. Este conjunto tiene 1 solo elemento, $\mathbb{N}$, que es, a su vez, un conjunto con infinitos elementos. Pero, para no perdernos, repetimos que A tiene 1 elemento. También, $\{\emptyset\}$ es un conjunto con 1 elemento. Y $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es un conjunto con 2 elementos: $\emptyset$ y $\{\emptyset\}$. ¿Veis por dónde voy?

A Gottlob Frege se le ocurrió definir así los números naturales en forma de conjuntos.

- El 0 se define como $\emptyset$, ya que es un conjunto con 0 elementos que sé que existe.
- El 1 se define como $\{\emptyset\}$, ya que es un conjunto con 1 elemento y ese elemento es el conjunto vacío, que sé que existe.
- El 2 se define como $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ya que es un conjunto con 2 elementos que sé que existen.
- El 3 se define como $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ya que es un conjunto con 3 elementos que

sé que existen.

- En general, cualquier número, n, se define como el conjunto que contiene a todos los números anteriores, que se han definido previamente.

No voy a adentrarme en ello, pero esta definición justifica perfectamente la relación de orden como la inclusión de conjuntos y el número siguiente a otro como la unión de todos los conjuntos anteriores o iguales a ese número.

Ahora sí que podemos decir que sabemos qué es un número natural, aunque para ello hayamos perdido su *naturalidad*.

¿Y los otros números?

Los números enteros

Parece contraintuitivo a nuestros ojos, pero los números que, históricamente, identificamos tras los naturales fueron los *racionales*, las fracciones de toda la vida. Sin embargo, lo más conveniente en matemáticas es definir primero los números *enteros*.

Los números enteros son los números naturales junto con los números negativos: -1, -2, -3, ..., y el conjunto de números enteros se denota por $\mathbb{Z}$. Así pues,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Los números negativos nos sirven, fundamentalmente, para representar cantidades que "perdemos". Por ejemplo, si tenemos 10 euros y gastamos 4, lo representamos como $10-4$. Puede parecer que esto no es más que una resta de naturales, pero en los números naturales no *sabemos* restar, solo sumar. De hecho, $10 - 4$ es, en realidad, $10 + (-4)$, es decir, una suma de enteros. La resta es una ficción, no existe como tal, pero no dejaremos de hablar de resta.

Matemáticamente, un número entero se define como la clase de todos los pares de números naturales (n, m) que se relacionan con todos los otros pares (a, b) de la siguiente forma:

$$n + b = m + a$$

Si operamos un poco[2], obtenemos

$$n - m = a - b$$

. Es decir, un número entero es la resta de dos números naturales y, cualquier otra resta de números naturales que dé el mismo resultado se considera idéntica. Por ejemplo, $-3 = 4 - 7$, pero también $-3 = 2 - 5$. De este modo, $\mathbb{Z}$ es el conjunto cociente de los pares

[2] Estamos utilizando la resta, operación prohibida para números naturales, pero nos sirve para entender qué dice exactamente esta relación.

de naturales con esta relación de equivalencia. Para entender mejor esto podéis leer mi artículo *El conjunto cociente*[3] o este hilo de Twitter[4].

Los números racionales

Tomemos una tarta y partámosla por la mitad. Eso nos devuelve dos mitades que conforman la totalidad de la tarta. Inventémonos una unidad de medida de forma que la tarta pese 1 en ese sistema. Por ejemplo, si la tarta pesaba 500g, diremos que pesa 1 unidad de las nuestras. Entonces, algo que pese 1000g (o 1kg), pesará 2 de nuestras unidades.

Al partir la tarta por la mitad, cada mitad pesa media unidad. Si la partiésemos en 3, 4 o 5 trozos idénticos, cada trozo pesaría, respectivamente, un tercio, un cuarto o un quinto de la unidad. Los egipcios eran unos expertos utilizando esta manera de calcular. En los períodos en los que el Nilo se desbordaba, el faraón veía reducidas sus tierras y sus cultivos y necesitaba saber cuánta tierra se había comido el río.

A este tipo de números se los conoce como números **racionales**, y el conjunto de números racionales se denota por $\mathbb{Q}$. Seguramente los habéis estudiado en la escuela con el nombre de fracciones y tenían una pinta similar a esta:

$$\frac{n}{m}$$

Al número que hay "sobre" la línea se le llama numerador, y al que hay "bajo" la línea se le llama denominador. Volviendo a la deliciosa tarta de queso (sí, es de queso y sí, está deliciosa), para saber cuánto pesa una de las dos mitades situamos el peso que tiene la tarta al completo en el numerador, 1, y el número de trozos en los que la hemos partido, 2, en el denominador. Luego cada mitad pesa $\frac{1}{2}$. Por cierto, si nos da por hacer otra deliciosa tarta de queso idéntica a la primera (podemos hacerlo en el mundo de las matemáticas) y la partimos a la mitad, tendremos 4 trozos cuyo peso sumado es 2. Así, si queremos saber cuánto pesa uno de esos trozos, lo representamos como $\frac{2}{4}$. Y, evidentemente, tiene que pesar $\frac{1}{2}$, porque, al fin y al cabo, es una mitad de una tarta entera. Se da un fenómeno un tanto extraño, pero parecido al que se daba con los números enteros, y es que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Para un matemático resulta aberrante escribir 0,5 en lugar de $\frac{1}{2}$, siempre tratamos de evitar escribir los racionales como números con decimales. De hecho, ver el numerador y el denominador indica la proporción, o *razón*, que se guarda, por ello se llaman números *racionales*. ¿Pero cómo definimos un número racional?

Debemos realizar algunas consideraciones previas:

- Al igual que con la resta para números naturales, no podemos dividir números

[3] https://elescritoriodeenrique.com/2020/03/01/302/.
[4] https://twitter.com/enrique_ferres/status/1362825970802163713

enteros tan alegremente, pues la división no tiene por qué ser otro número entero. Es por ello que los números racionales suponen una extensión de los números enteros.

- Seguramente os habrán insistido mil veces en el instituto que no se puede dividir por 0, es una de esas *operaciones prohibidas*. Físicamente no tiene ningún sentido dividir entre 0. En el ejemplo de la tarta supondría partir la tarta en 0 trozos y calcular el peso de ese trozo. La respuesta no es 0, ya que ni siquiera hay trozo. No podemos calcular el peso de un trozo que no existe.

Entonces, podemos definir $\mathbb{Q}$ como el conjunto de números de la forma

$$\frac{n}{m}, \text{ donde } n \text{ y } m \text{ son números enteros y } m \neq 0$$

Pero, una vez más, nos encontramos con el inconveniente de no saber cómo definir los números $\frac{n}{m}$. Los matemáticos decidimos definirlos como la clase de todos los pares de números enteros (n, m), con $m \neq 0$ de forma que cualquier otro par de números enteros (a, b), con $b \neq 0$ será igual que el primero si

$$nb = ma$$

Si operamos un poco[5], es lo mismo que decir

$$\frac{n}{m} = \frac{a}{b}$$

Esto es, todos los números racionales serán iguales si guardan la misma proporción. Vuelvo a redirigiros al artículo sobre el conjunto cociente para comprender mejor esta definición.

Números irracionales y números reales

Los pitagóricos eran una secta de la Antigua Grecia reunida en torno al famosísimo matemático Pitágoras. Practicaban el secretismo y el culto al conocimiento, pero sus descubrimientos no los hacían públicos. El lema de este grupo era "Todo es número". Esta creencia no solo significaba que pensaran que todo podía estudiarse mediante las matemáticas, ¡sino que los propios números formaban la realidad! Ellos entendían por número una cantidad medible, que pudiese expresare como un número racional, vaya. Sin embargo, uno de sus miembros, Hipaso de Metaponto, descubrió que en un triángulo rectángulo de base y altura iguales, la hipotenusa no era un número racional[6]. En concreto lo probó para el caso en el que la base y la altura son iguales a 1 y la hipotenusa, utilizando irónicamente el Teorema de Pitágoras, es $\sqrt{2}$.

En el siglo XVIII, Lambert demostró que el archiconocido π es un número *irracional*. El propio Euler demostró que el número e, indispensable para el Análisis Matemático,

[5] Como con los enteros, utilizamos la operación de la división, prohibida en los enteros, para entender qué significa esta relación.

[6] Una demostración de este hecho puede verse en mi artículo *Algunos tipos de demostraciones* https://elescritoriodeenrique.com/2020/03/11/algunos-tipos-de-demostraciones/ y podéis pasaros también por este hilo en el que explico más sobre la historia de Hipaso y los números irracionales https://twitter.com/enrique_ferres/status/1393862189799325698

es irracional. ¿Pero cómo definimos número irracional? Podríamos intentar decir que un número irracional es cualquier número que no puede escribirse como $\frac{n}{m}$, es decir, un número que no es racional. Pero después de haber construido los números hasta aquí, nos gustaría poder construir también los números irracionales. Sin embargo, la complejidad de esta construcción es mayor que las anteriores, por lo que simplemente voy a tratar de esbozar la idea.

Una **cortadura de Dedekind** se define como la cota superior de un conjunto de números racionales. Veamos un ejemplo. Supongamos que tenemos el conjunto de todos los números racionales menores que 0. Esto quiere decir que la cota superior de este conjunto es el 0, sería la cortadura de Dedekind de este conjunto.

Podemos complicarlo más e involucrar operaciones en la definición del conjunto. Por ejemplo, consideremos el conjunto formado por todos los números racionales, r, tales que $r^2 < 2$. ¿Cuál será la cortadura de Dedekind de este conjunto? Haciendo uso de los conocimientos que tenemos, aunque estén "prohibidos", sabemos que si elevamos al cuadrado $\sqrt{2}$ obtenemos como resultado

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

En este caso, la cortadura de Dedekind de un conjunto de números racionales nos devuelve un número que no es racional[7].

Así, vamos obteniendo cortaduras (números), algunas racionales y otras que no son racionales. Si coleccionamos todas las cortaduras de Dedekind que no son racionales, obtenemos el conjunto de los números irracionales que, cada vez se escribe con mayor frecuencia como $\mathbb{I}$. Y si juntamos los números racionales y los irracionales obtenemos el conjunto de números reales, denotado por $\mathbb{R}$.

Los números reales son todos los números que utilizamos en nuestro día a día, ya que entre ellos están los naturales, con los que contamos; los enteros, con los que sabemos si vamos a un piso del sótano en ascensor; los racionales, con los que repartimos las tartas con nuestros familiares y amigos; y los irracionales, con los que viajamos en coche gracias a la forma circular de las ruedas.

Conclusiones

Hay otro tipo de números, los números *complejos*, a los que ya dediqué el artículo *Números complejos y extensiones de cuerpos*[8]. Además, existen muchos otros tipos de números: primos, perfectos, algebraicos, trascendentes, normales, ... Los números, como los sentimientos, nos acompañan durante toda nuestra vida, pero tienen la maravillosa característica de trascendernos a nosotros como especie.

[7] La forma rigurosa de hacer esto sería demostrando que la cota de este conjunto no puede ser un número racional.

[8] https://elescritoriodeenrique.com/2020/10/09/numeros-complejos-y-extensiones-de-cuerpos/

En el artículo de hoy hemos visto cómo definir qué es un número para todos los tipos de números que nos hemos encontrado alguna vez en nuestra vida. Además, hemos visto cómo todo conjunto de números se ha podido definir gracias a los números naturales, aquellos con los que los primeros seres humanos contaban las lunas y las cosechas. Los números naturales se han podido definir gracias al 0, y este, gracias al conjunto vacío, lo que me hace filosofar sobre el poder de la nada.

Me gustaría acabar hablando de los fundamentos de la Aritmética, la rama de las matemáticas que se dedica al estudio de los números y sus propiedades. Ya he mencionado que, a finales del siglo XIX, se llevó a cabo una reforma de la Matemática en aras de conseguir hacer de ella una Ciencia sólida desde el punto de vista lógico, sin contradicciones y con unos axiomas de los que deducir todas las matemáticas. En esos axiomas estarían recogidos, en potencia, todos los resultados por haber. Algunos matemáticos liderados por Henri Poincaré consideraban esto un imposible, mientras que otros matemáticos, liderados por David Hilbert, opinaban lo contrario. Ya en el siglo XX, Kurt Gödel demostró unos de los resultados más heladores de toda la historia.

El primero de ellos dice que la Aritmética jamás podrá tener dichos axiomas, es decir, encontraremos proposiciones que, a partir de los axiomas que utilizamos (los axiomas de Peano), no podremos decir si son ciertas o no, serán indemostrables. Esto supone que esas proposiciones tendremos que, o bien añadirlas a nuestra axiomática, o bien no añadirlas, pero entonces no podremos dar por cierto ningún resultado que se deduzca de ellas.

El segundo es todavía más aterrador. Afirma que si la Aritmética no contiene contradicciones, jamás podremos probarlo. Esto significa que si alguien llegase a demostrar que la Aritmética no contiene contradicciones, ¡sí que las contendría! ¡Es un resultado loquísimo! Pareciera como si un Dios travieso nos hubiese dejado el mensaje: *ya que decidís no creer en nada más allá de lo que podáis deducir con las matemáticas, tendréis, por lo menos, que creer en la irremediable efectividad de las matemáticas.*